Экзамен, вариант II

Геометрия, осенний семестр 2020 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Итог
Оценка									

Продолжительность экзамена — 3 часа. На полный балл достаточно решить любые 6 задач (всего задач 8). Нельзя пользоваться никакими интерактивными онлайн ресурсами.

Задача 1. Веб-дизайнер Петя сначала параллельно перенёс квадрат $\{(x, y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$ на вектор $(1, 1)$, потом повернул на $90°$ против часовой стрелки относительно начала координат, потом результат растянул по оси x в два раза, а по оси y — в три раза, и наконец повернул на $90°$ по часовой стрелке относительно начала координат. Запишите Петино преобразования в виде $(x, y) \mapsto (ax + by + e, cx + dy + f)$ для некоторых вещественных констант a, b, c, d, e и f.

Задача 2. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Являются ли линейно зависимыми векторы

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{6}\ ?$$

Задача 3. Найдите ядро, образ и ранг оператора $T : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, который в некотором базисе записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{pmatrix}.$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 4. Вычислите определитель 4×4-матрицы

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Найдите длину ортогональной проекции вектора v на гиперплоскость Π в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\};$$

$$v = (0, 1, 2, 1).$$

Задача 6. Найдите площадь параллелограмма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы u и v, если

$$u = (3, 1, -1, 2);$$

$$v = (1, -2, 2, 1).$$

Задача 7. Все вершины параллелепипеда в трёхмерном вещественнном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что строго внутри него есть ровно 9 целочисленных точек. (Объём единичного куба равен единице.)

Задача 8. Найдите количество всех прямых в трёхмерном аффинном пространстве $\mathbb{F}_2^3$ над полем из двух элементов.