Геометрия, 3-й модуль 2020 г.

Семинары 1-2. Собственные векторы и собственные числа

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Ненулевой вектор $v \in V$ в векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$ называется собственным вектором (eigenvector) линейного оператора $T : V \to V$, если

$$T(v) = \lambda v$$

для какого-нибудь скаляра $\lambda \in \mathbb{F}$. Скаляр λ называется собственным значением или числом (eigenvalue) оператора T.

Задача 1. Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(г)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите все вещественные собственные числа и собственные векторы оператора T.

Задача 2. Пусть $T : V \to V$ — оператор на векторном пространстве V.

(а) Докажите, что у T есть собственный вектор с собственным значением 0 тогда и только тогда, когда размерность ядра оператора T положительна.

(б) Докажите, что у T есть собственный вектор с собственным значением λ тогда и только тогда, когда размерность ядра оператора $T - \lambda I$ положительна.

(в) Докажите, что если V конечномерно, то *спектр* (=множество собственных чисел) оператора T совпадает с множеством корней многочлена $\det(T - xI)$. (Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* оператора T.)

Задача 3. (а) Определите, какие из операторов в задаче 1 *диагонализуемы*, то есть в некотором базисе записываются диагональной матрицей. Для диагонализуемых операторов найдите базис, в котором их матрица диагональна.

(б) Нарисуйте векторы $T^n(v)$ для $n = 1, \ldots, 5$ и $v = (1, 0)$, $(1, -1)$ для всех операторов T из задачи 1.

Задача 4. Докажите эквивалентность утверждений:

(1) Вектор v — собственный вектор оператора $T : V \to V$ с ненулевым собственным значением λ.

(2) Оператор T сохраняет прямую $\langle v \rangle$, порождённую вектором V (то есть прямая $\langle v \rangle$ является *инвариантным подпространством* при действии оператора T), причём на этой прямой T действует как гомотетия с коэффициентом λ.

(3) Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V, и $e_i \in \langle v \rangle$, то у матрицы оператора T в таком базисе в i-том столбце будет стоять единственный ненулевой коэффициент, равный λ.

Задача 5. (а) Докажите, что у собственных векторов ортогонального преобразования евклидова пространства собственные значения равны ± 1.

(б) Докажите, что у ортогонального преобразования из $SO_3(\mathbb{R})$ есть собственный вектор с собственным значением 1.

(в) Докажите, что все преобразования из $SO_3(\mathbb{R})$ являются вращениями трёхмерного пространства.

Задача 6. Имеются кувшин с литром кофе и кувшин с литром молока, а также чашка объёмом k миллилитров. Сначала из кувшина с кофе переливают одну чашку в кувшин с молоком и перемешивают, а затем из кувшина с молоком переливают одну чашку в кувшин с кофе. Сколько примерно кофе окажется в кувшине с молоком, если повторить эту процедуру тысячу раз?

Задача 7. Диагонализуемый оператор T действует на n-мерном пространстве V.

(а) Покажите, что если $(v_1, \ldots, v_n)$ — базис из собственных векторов оператора T, то матрица D оператора T в этом базисе диагональна.

(б) Пусть A — матрица оператора T в каком-нибудь базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Найдите такую обратимую матрицу P, что

$$AP = PD.$$

Задача 8. (а) Найдите явную формулу, выражающую через n коэффициенты матрицы A^n, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(б) Выведите из пункта (а) формулу Бине для чисел Фибоначчи:

$$f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где через λ_1 обозначено золотое сечение Φ, а $\lambda_2 = 1 - \Phi$.

Задача 9. Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы A^n для всех матриц A из задачи 1.

Задача 10 (PageRank)**.** Дизайнер Петя, пытаясь найти значение слова “сепулька”, обнаружил всего четыре сайта. Первый сайт ссылается на второй, третий и четвёртый, второй — на третий и четвёртый, третий — только на первый, а четвёртый — на первый и на третий. Помогите Пете упорядочить сайты по релевантности, вычислив PageRank (PR) вектор этой системы сайтов.

Определение (неполное) PR вектора:

(1) Пусть n — количество сайтов. Зафикисируем биекцию между базисными векторами в $\mathbb{R}^n$ и сайтами.

(2) Определим линейный оператор $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по правилу: если на сайт i ссылаются сайты $j_1, \ldots, j_s$, то i-тая координата вектора $T(v)$ равна взвешенной сумме

$$\frac{x_{j_1}}{k_{j_1}} + \ldots + \frac{x_{j_s}}{k_{j_s}},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора v, а через k_j обозначено количество ссылок, исходящих из сайта j.

(3) PR вектор — это собственный вектор оператора T с собственным значением 1.

(4) Сумма координат PR вектора равна 1.

Задача 11. Приведите пример графа сайтов (вершин) и ссылок (ориентированных рёбер), для которого PageRank вектор

(а) не существует; (б) не единственен.

Задача 12 ($\star$)**.** (а) На завтрак Белоснежка налила семи гномам молока. Первый гном распределил молоко из своей кружки поровну между остальными гномами (себе ничего не оставил). Затем то же самое проделал второй гном, третий, и так далее, до седьмого гнома включительно. В конце у каждого гнома оказалось ровно столько молока, сколько ему вначале налила Белоснежка. Можно ли определить однозначно, сколько молока у каждого гнома, если всего молока 42 унции?

(б) Белоснежка налила каждому гномам 6 унций молока. Гномы повторили процедуру из пункта (а) тысячу раз. Сколько примерно молока будет в чашке у каждого гнома?