Геометрия, 3-й модуль 2020 г.

Семинары 3-4. Характеристический многочлен

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Характеристическим многочленом $n \times n$ матрицы A называется многочлен от одной переменной:

$$\chi_A(t) = \det(A - tI),$$

где I — единичная $n \times n$ матрица.

Задача 1. Проверьте, что если A — матрица 2×2, то её характеристический многочлен равен

$$\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A),$$

где через $\mathrm{tr}(A)$ обозначается след матрицы (=сумма элементов на её главной диагонали).

Задача 2. Оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{(г)}\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдите характеристический многочлен матрицы оператора T и все вещественные корни характеристического многочлена.

Задача 3. (а) Докажите, что характеристический многочлен $\chi_A(t)$ для 3×3 матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\chi_A(t) = -t^3 + \mathrm{tr}(A)t^2 - \mathrm{tr}(\Lambda^2 A)t + \det(A),$$

где

$$\mathrm{tr}(\Lambda^2 A) := \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(При $n = 3$ можно определить саму матрицу $\Lambda^2 A$ как матрицу алгебраических дополнений $\hat{A}$ из задачи 11 семинаров 14–15 за 2-й модуль.)

(б) Проверьте свои вычисления в задаче 2, пользуясь формулой из пункта 3(а).

Задача 4. Пусть A — матрица размера $n \times n$.

(а) Найдите степень характеристического многочлена $\chi_A(t)$.

(б) Найдите свободный член характеристического многочлена $\chi_A(t)$.

(в) Найдите коэффициент при t^{n-1} в характеристическом многочлене $\chi_A(t)$.

Задача 5. Определите, какие из операторов в задаче 2 диагонализуемы. Для диагонализуемых операторов найдите базис, в котором их матрица диагональна. Для недиагонализуемых докажите, что такого базиса не существует.

Задача 6. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Оператор $T : V \to V$ задан в некотором базисе матрицей A. Докажите равносильность утверждений:

(1) Характеристический многочлен матрицы A имеет корень λ в поле $\mathbb{F}$.
(2) Оператор T имеет собственный вектор с собственным значением λ.

Задача 7. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор на n-мерном вещественном пространстве.

(а) Докажите, что если n — нечётно, то у T обязательно есть собственный вектор.

(б) Для каждого чётного n приведите пример оператора T, у которого нет собственных векторов.

Задача 8. Может ли ненулевая вещественная 3×3 матрица A удовлетворять уравнению:

(а) $A^{2021} = 0$; (б) $(A^2 + I)^{2021} = 0$ (в) $A(A^2 + I)^{2021} = 0$?

Задача 9. Докажите теорему Гамильтона–Кэли для 2×2 матрицы A, то есть проверьте матричное тождество:

$$\chi_A(A) = 0$$

Задача 10. Сколько 2×2 матриц удовлетворяют уравнению

$$A^2 - 3A + 2I = 0?$$

Задача 11. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами.

(а) Докажите, что $f(x)$ имеет не более чем n вещественных корней.

(б) Почему рассуждение из пункта (а) не позволяет доказать следующее (неверное) утверждение:

> “Уравнению $f(A) = 0$ удовлетворяют не более чем n вещественных матриц размера 2×2.”

Задача 12. (а) Найдите остаток при делении многочлена t^{2021} на многочлен t^2-3t+2.

(б) Найдите характеристический многочлен матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(в) Не вычисляя собственные векторы, напишите явную формулу для коэффициентов матрицы A^{2021}.