

ТРИВИУМ, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2021 г.

**Контрольная 18 января**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Фамилия и имя студента:**

Задача	1	2	3	4	5	6	Итого
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

**Задача 1.** Рассмотрим кольцо многочленов  $\mathbb{R}[x]$  как векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Являются ли линейно зависимыми векторы:

$$(x - 1), \quad (x - 1)^2, \quad x^2 - 2x + 2?$$

**Задача 2.** Найдите ядро, образ и ранг оператора  $T : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^5$ , который в некоторых базисах записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \\ 41 & 42 & 43 \\ 51 & 52 & 53 \end{pmatrix}$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в тех же самых базисах.)

**Задача 3.** Найдите ориентированный объём параллелепипеда в  $\mathbb{R}^4$ , натянутого на векторы  $v_1 + v_2 + v_3$ ,  $v_1 + v_2 + v_4$ ,  $v_1 + v_3 + v_4$  и  $v_2 + v_3 + v_4$ , если известно, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_4$  равен 3.

**Задача 4.** Найдите площадь параллелограмма в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ , натянутого на векторы  $u$  и  $v$ , если

$$u = (3, 1, -1, 2);$$

$$v = (1, -2, 2, 1).$$

**Задача 5.** Кривая на аффинной плоскости  $\mathbb{R}^2$  задана уравнением второго порядка:

$$-10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2 = 0.$$

Определите тип кривой (эллипс, гипербола, парабола, пара прямых, ...).

**Задача 6.** Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n; \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 5.$$

Найдите явную формулу, выражающую  $a_n$  через  $n$ .