Тривиум, весенний семестр 2021 г.

Контрольная 25 января

факультет математики, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	Итог
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Будем рассматривать $\mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Пусть $V \subset \mathbb{R}$ — подпространство, порождённое порождённое векторами 1, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{4}$. Определим линейный оператор $T : V \to V$ формулой

$$T(a) = a \cdot (\sqrt[3]{2} + 1).$$

Предъявите базис в пространстве V и выпишите матрицу оператора T в этом базисе.

Задача 2. Найдите ядро, образ и ранг оператора $T : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, который в некотором базисе записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{pmatrix}.$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 3. Вычислите определитель 4×4-матрицы

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найдите длину ортогональной проекции вектора v на гиперплоскость Π в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\};$$
$$v = (0, 1, 2, 1).$$

Задача 5. Квадратичная форма q на $\mathbb{R}^3$ задана формулой:

$$q(x_1, x_2, x_3) = -\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le 3} 4x_i x_j.$$

Является ли q положительно определённой?

Задача 6. Найдите явную (не рекуррентную) формулу, выражающую через n коэффициенты матрицы A^n для

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$