

**Домашнее задание 2. Срок сдачи 8 февраля.**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

**Задача 1.** Найдите характеристический многочлен и собственные значения оператора на  $\mathbb{R}^3$ , заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** (а) Покажите, что для любого квадратного трёхчлена  $t^2 + pt + q$  с вещественными коэффициентами  $p$  и  $q$  найдётся вещественная матрица  $A$  такая, что

$$\chi_A(t) = t^2 + pt + q.$$

(б) Приведите пример вещественной матрицы, характеристический многочлен которой равен

$$t^8 + 1.$$

**Задача 3.** Выпишите явную формулу для  $A^n$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** (а) Известно, что  $n \times n$  матрица  $A$  верхнетреугольна (то есть  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ ). Докажите, что

$$\chi_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \cdots (a_{nn} - t).$$

(б) Приведите пример недиагонализуемого оператора  $T$ , характеристический многочлен которого равен

$$(1 - t)^3.$$

**Задача 5.** Докажите, что линейный оператор на  $n$ -мерном векторном пространстве не может иметь больше, чем  $n$  попарно различных собственных значений.