

Домашнее задание 5. Срок сдачи 9 марта.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

**Задача 1.** Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора на  $\mathbb{R}^4$ , заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & 9 \\ 3 & 3 & -7 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** (а) Нильпотентный оператор  $N : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  удовлетворяет условиям:

$$\dim \text{Ker}(N) = 3; \quad \dim \text{Ker}(N^2) = 5.$$

Найдите его жорданову нормальную форму.

(б) Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис для оператора  $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ , который в стандартном базисе задан матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора на  $\mathbb{C}^n$ , заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** (а) Как может выглядеть жорданова нормальная форма матрицы размера  $n \times n$ , если ранг матрицы равен единице?

(б) Найдите жорданову нормальную форму матрицы размера  $n \times n$ , у которой все коэффициенты равны 1.

**Задача 5.** Вычислите  $A^{2021}$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e & \pi & \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & e^\pi \\ 0 & 0 & i & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$