Геометрия, 3-й модуль 2020 г.

Семинары 5-6. Минимальный многочлен

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Многочлен $\mu(t)$ со старшим коэффициентом единица называется минимальным многочленом квадратной матрицы A, если $\mu(A) = 0$, и степень многочлена $\mu(t)$ минимально возможная.

Задача 1. Найдите минимальный многочлен $n \times n$ матрицы A, если
(а) $A = 0$; (б) $A = \lambda I$; (в) все коэффициенты матрицы A равны 1.

Задача 2. Докажите, что если λ — корень минимального многочлена матрицы A, то λ — это собственное значение матрицы A.

Задача 3. Найдите минимальные многочлены вещественных матриц:

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(г) } A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(д) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(е) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V, а A и B его матрицы в разных базисах. Верно ли, что минимальные многочлены матриц A и B совпадают?

Задача 5. Найдите характеристический и минимальный многочлены диагональной матрицы размера $n \times n$, у которой на диагонали стоят попарно различные числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, причём λ_i встречается ровно m_i раз.

Для определённости можно считать, что на диагонали стоит набор чисел, упорядоченный таким образом:

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{m_k}.$$

Задача 6. Пусть A — вещественная $n \times n$ матрица. Обозначим через $\mu_A^{\mathbb{R}}(t)$ минимальный многочлен матрицы A над полем $\mathbb{R}$, а через $\mu_A^{\mathbb{C}}(t)$ — минимальный многочлен той же матрицы над полем $\mathbb{C}$. Верно ли, что $\mu_A^{\mathbb{R}} = \mu_A^{\mathbb{C}}$?

Задача 7. (а) Покажите, что для каждой 2×2 матрицы A над полем $\mathbb{F}$ и каждого многочлена $f(t)$ с коэффициентами в $\mathbb{F}$ найдутся такие числа α и β, что

$$f(A) = \alpha I + \beta A.$$

Выразите α и β через f и собственные значения матрицы A.

(б) Найдите α и β для матриц из задачи 3 и многочлена $f(t) = t^n$.

Задача 8. Докажите, что минимальный и характеристический многочлены имеют одни и те же корни (без учёта кратностей).

Задача 9. (а) Известно, что минимальный многочлен матрицы A над полем $\mathbb{F}$ равен $(t-1)(t-2)$. Покажите, что для каждого многочлена $f \in \mathbb{F}[t]$ найдутся такие числа α и β, что $f(A) = \alpha I + \beta A$.

(б) Найдите α и β для многочлена $f(t) = t^n$.

Задача 10. Найдите минимальный многочлен матрицы A и явную формулу для A^n:

$$(\text{а})\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{б})\ A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad (\text{в})\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. (а) Чему может быть равен минимальный многочлен 2×2 матрицы, если её характеристический многочлен равен $(t-\lambda)^2$?

(б) Верно ли, что если оператор T на конечномерном векторном пространстве имеет два линейно независимых собственных вектора с собственным значением λ, то λ — кратный корень характеристического многочлена оператора T?

(в) Верно ли обратное?

Задача 12. Приведите пример 3×3 матрицы с минимальным многочленом

(а) t^3; (б) $(t-1)^3$; (в) $t(t-1)$; (г) $t^2(t-1)$; (д) $t(t^2+1)$.