Геометрия, 3-й модуль 2020 г.

Семинары 7-8. Инвариантные и корневые подпространства

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Корневое подпространство V^λ оператора $T : V \to V$, соответствующее собственному значению λ, состоит из всех таких векторов $v \in V$, что
$$(T - \lambda I)^k(v) = 0$$
для какого-нибудь натурального k.

Задача 1. (а) Докажите, что если $\dim V = n$, то корневое подпространство V^λ оператора $T : V \to V$ совпадает с ядром оператора $(T - \lambda I)^n$.

(б) Докажите, что если минимальный многочлен оператора T раскладывается в произведение многочленов
$$\mu_T(t) = (t - \lambda)^m f(t),$$
где $f(\lambda) \neq 0$, то корневое подпространство V^λ совпадает с ядром оператора $(T-\lambda I)^m$.

Задача 2. (а) Пусть A_1 и A_2 — матрицы размера $k\times k$, а D_1 и D_2 — матрицы размера $\ell \times \ell$. Докажите тождество для блочно-диагональных матриц:
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 & 0 \\ 0 & D_1D_2 \end{pmatrix}.$$

(б) Выразите характеристический и минимальный многочлены блочно-диагональной матрицы
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix},$$
через характеристические и минимальные многочлены, соответственно, матриц A_1 и D_1.

(в) Пусть B_1 и B_2 — матрицы размера $k \times \ell$, а C_1 и C_2 — матрицы размера $\ell \times k$. Вычислите
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Является ли $\mathbb{R}^4$ прямой суммой подпространств U_1 и U_2, где

(а) $U_1 = \langle(1, 1, 1, 1)\rangle$, $U_2 = \langle(1, 2, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (4, 3, 2, 1)\rangle$;

(б) $U_1 = \langle(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\rangle$, $U_2 = \langle(1, 4, 3, 2), (1, 3, 2, 4)\rangle$?

Задача 4. Пусть U_1 и U_2 — подпространства в векторном пространстве V. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(1) $V = U_1 \oplus U_2$ (то есть каждый вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде суммы $v = u_1 + u_2$, где $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$).

(2) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ и $U_1 + U_2 = V$.

(3) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$ и $U_1 + U_2 = V$.

(4) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Задача 5. Опишите все инвариантные подпространства оператора $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в некотором базисе матрицей
$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(г) Известно, что у оператора $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ бесконечно много попарно различных инвариантных подпространств. Докажите, что найдётся инвариантная плоскость, в ограничении на которую T является гомотетией.

Задача 6. (а) Докажите, что ядро и образ линейного оператора являются его инвариантными подпространствами.

(б) Докажите, что каждое корневое подпространство оператора инвариантно относительно действия оператора.

Задача 7. Диагонализуем ли оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданный в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}?$$

Задача 8. Найдите корневые подпространства оператора T на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$, если T задан в стандартном базисе матрицей:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{(г)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В каждом случае проверьте непосредственно, что V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств оператора T, и найдите жорданов базис.

Задача 9. Для всех операторов из предыдущей задачи найдите их

(а) жордановы нормальные формы;

(б) характеристические и минимальные многочлены.

Задача 10. Пусть N — нильпотентный оператор на n-мерном векторном пространстве (то есть $N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$), и при этом $N^{n-1} \neq 0$. Найдите минимальный многочлен оператора N. Приведите пример такого оператора для $n = 4$.

Задача 11. (а) Характеристический многочлен оператора равен $(t-\lambda)^3(t-\mu)^4$. Как может выглядеть жорданова нормальная форма такого оператора?

(б) Характеристический многочлен оператора равен $(t-2)^5(t-4)^7$. Найдите его жорданову нормальную форму, если известно, что все блоки имеют размер 2 или 3.

Задача 12. (а) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен t^2. Докажите, что $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} T$.

(б) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен $t^2 - t$. Докажите, что $V = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$.