Тривиум, весенний семестр 2021 г.

Контрольная 8 февраля

факультет математики, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	Итог
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой. Выходить во время контрольной нельзя.

Задача 1. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Являются ли линейно зависимыми векторы:

$$(x+1), \quad (x+1)^2, \quad x^2-2x-3?$$

Задача 2. Найдите ядро, образ и ранг оператора $T : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^3$, который в некоторых базисах записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 & 51 \\ 12 & 22 & 32 & 42 & 52 \\ 13 & 23 & 33 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в тех же самых базисах.)

Задача 3. Найдите ориентированный объём параллелепипеда в $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы $v_1+v_2+v_3-v_4$, $v_1+v_2-v_3+v_4$, $v_1-v_2+v_3+v_4$ и $-v_1+v_2+v_3+v_4$, если известно, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3 и v_4 равен 2.

Задача 4. Найдите площадь параллелограмма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы u и v, если

$$u = (1, 3, -1, 2);$$
$$v = (1, -2, 2, 1).$$

Задача 5. Квадратичная форма q на $\mathbb{R}^3$ задана формулой:

$$q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le 3} 4x_i x_j.$$

Является ли q положительно определённой?

Задача 6. Оператор T на $\mathbb{R}^4$ удовлетворяет уравнению $(T+I)^2(T^2+I) = 0$ (через I обозначается тождественный оператор). Чему могут быть равны характеристический и минимальный многочлены этого оператора? (Нужно перечислить все возможные пары.)