Геометрия, 3-й модуль 2021 г.

Семинары 9-10. Жорданова нормальная форма в жизни

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Жорданов блок (или жорданова клетка) размера $n\times n$ с собственным значением λ — это $n \times n$ матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & & & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Задача 1. (а) Сколько единиц стоит над главной диагональю в жордановом блоке $n \times n$?

(б) Вычислите минимальный и характеристический многочлен жорданова блока J размера $n \times n$ с собственным значением λ.

(в) Вычислите J^k. (Подсказка: представьте J как $\lambda I + N$, где N — нильпотентная матрица, и воспользуйтесь биномом Ньютона.)

(г) Вычислите $f(J)$ для многочлена $f(t)$. (Подсказка: используйте ряд Тейлора для $f(t)$ в точке λ.)

(д) Вычислите $e^J := I + J + \frac{J^2}{2} + \frac{J^3}{3!} + \dots$. (Подсказка: проверьте, что $e^J = e^{\lambda I}e^N$.)

Задача 2. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор. Определите количество и размер жордановых блоков в жордановой нормальной форме оператора T, если характеристический многочлен оператора равен

$$\text{(а) } (t-1)(t-2)(t-3)(t-4); \quad \text{(б) } (t-1)^2(t-2)(t-3);$$
$$\text{(в) } (t-1)^2(t-2)^2; \quad \text{(г) } (t-1)^3(t-2); \quad \text{(д) } (t-1)^4.$$

В каждом пункте нужно перечислить все возможные варианты.

Задача 3. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

вычислите

$$\text{(а) } A^{2021}; \quad \text{(б) } e^A.$$

Задача 4. Найдите явную формулу, выражающую a_n через n, для рекуррентной последовательности:

$$\text{(а) } a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 3.$$

$$\text{(б) } a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n); \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

$$\text{(в) } a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n); \quad a_0 = 2,\ a_1 = 2.$$

Задача 5. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Определим оператор $T : V \to V$ формулой:

$$(Tf)(x) = f(x+2).$$

Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора T.

Задача 6. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $T : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ на пространстве многочленов, если T переводит многочлен $f(x)$ в многочлен:

(а) $f'(x)$; (б) $xf'(x)$; (в) $(x+1)f'(x)$; (г) $f(x+1) - f(x)$.

Задача 7. Пусть V — пространство всех вещественных полиномиальных функций от двух переменных x и y степени не выше 3 (то есть пространство, порождённое мономами $x^i y^j$, где $i + j \leq 3$). Определим оператор $T : V \to V$ формулой:

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора T.

Задача 8. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

(а) $\chi = t^6 - 1$, $\mu = t^3 - 1$;
(б) $\chi = (t-1)^2(t-2)^2$, $\mu = (t-1)(t-2)$;
(в) $\chi = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu = (t-1)^2(t-2)^3$?

Задача 9. Оператор T на $\mathbb{R}^4$ удовлетворяет уравнению

$$\text{(а) } (T+I)^2(T^2+I) = 0; \qquad \text{(б) } (T+I)(T^2+I)^2 = 0.$$

Чему могут быть равны характеристический и минимальный многочлены этого оператора? (Нужно перечислить все возможные пары.)

Задача 10. Для какого минимального n найдётся такая целочисленная $n \times n$ матрица $A \neq I$, что $A^5 = I$?

Задача 11. Докажите, что два коммутирующих линейных оператора на конечномерном комплексном векторном пространстве имеют общий собственный вектор.