Алгебра и геометрия, весенний семестр 2021 г.

Темы коллоквиума.

факультет математики, НИУ ВШЭ

(1) Определения: кольцо, поле. Примеры: целые числа, комплексные числа, поле из двух элементов, поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Объяснение, почему $(-1)(-1) = 1$. Комплексные числа как преобразования плоскости. Основная теорема алгебры (без доказательства). [Vinberg, гл.1] [KR, гл. 2, §5], [AV, рассказ “Аксиоматический метод”], [AI]

(2) Определения: сложение векторов и умножение на число в вещественном координатном пространстве, 8 свойств (аксиомы векторного пространства), линейное отображение, матрицы и произведение матриц. Примеры: одномерный случай, матрица, умноженная на столбец дает столбец, матрица для поворота на 90 градусов и для поворота на произвольный угол. Каждое линейное отображение задается матрицей. [Vinberg, гл. 1, §7], [Ar, гл. 1, §1], [Ki1, гл. 1-4]

(3) Определения: скалярное произведение, длина, расстояние, площадь, объём, векторное произведение. Билинейность скалярного произведения. Вычисление косинуса угла между векторами через скалярное произведение. Вычисление площади параллелограмма. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. [Vinberg, гл. 5, §4], [Ar, гл. 7, §1]

(4) Определения: делимость в кольцах, простые и неприводимые элементы, деление с остатком. Примеры: целые числа, гауссовы целые числа, неприводимый и не простой элемент в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, кольцо многочленов с коэффициентами в поле. Решето Эратосфена. Алгоритм Евклида и представление НОД(a, b) в виде линейной комбинации a и b (для чисел и многочленов). Основная теорема арифметики. [Vinberg, гл. 3, §5], [Ar, гл. 11, §§1-4], [Ka]

(5) Определения: векторное пространство, векторы, скаляры, линейная комбинация, линейная зависимость, элементарные преобразования строк матрицы. Примеры: координатное векторное пространство. Метод Гаусса. Приведение матрицы к стандартной ступенчатой форме преобразованиями строк, решение систем линейных уравнений и поиск линейной зависимости между векторами. [Vinberg, гл. 2, §1], [Ar, гл. 1, §2; гл. 3, §§1-2], [Ki1, гл. 5-6],

(6) Определения: векторное подпространство, пересечение и сумма подпространств, порождающий набор, базис, координаты, размерность, линейный оператор, его ядро и образ, изоморфизм. Примеры: базисы в пространстве многочленов и интерполяционная формула Лагранжа. Любые два базиса в векторном пространстве равномощны (только конечномерный случай). Каждое векторное пространство изоморфно координатному векторному пространству. [Vinberg, гл. 2, §2], [Ar, гл. 3, §§3-4; гл. 4, §§1], [Ki1, гл. 3, 5]

(7) Определения: матрица линейного оператора, ранг линейного оператора и матрицы. Примеры: движения плоскости, дифференцирование многочленов, линейные функции. Как выбрать базисы в области определения и области значений, чтобы матрица линейного оператора имела наиболее простой вид. При композиции линейных операторов их матрицы перемножаются. Ранг оператора равен размерности его области определения минус размерность ядра. Критерии обратимости линейного оператора в терминах его ядра и образа. [Vinberg, гл. 2, §3], [Ar, гл. 4, §§1-2], [Ki1, гл. 4]

(8) Определения: определитель как ориентированный объём параллелепипеда, определитель линейного оператора, определитель матрицы. Примеры: определители в размерности 2 и 3, равносоставленные параллелограммы имеют равные площади. Вычисление определителя с помощью элементарных преобразований столбцов. [Vinberg, гл. 2, §4], [Ar, гл. 1, §§3-4]

(9) Определения: аксиоматическое определение определителя (полилинейность, кососимметричность, нормировка). Теорема существования и единственности определителя. Разложение определителя по строке. Определитель произведения матриц равен произведению определителей. Явная формула для определителя. [Vinberg, гл. 2, §5], [Ar, гл. 1, §§3-4]

(10) Определения: аффинные пространства и подпространства, репер, аффинные преобразования. Примеры: пространство решений неоднородной системы линейных уравнений, взаимное расположение плоскости и прямой в четырёхмерном пространстве, аффинные преобразования прямой и плоскости. Связь понятия репера и понятия базиса. [Vinberg, гл. 7, §§1, 3]

(11) Определения: евклидовы пространства, длины, углы, расстояния, ортогональное дополнение к подпространству, ортогональный и ортонормированный базисы. Примеры: школьная плоскость, физическое пространство. Теорема Пифагора. Неравенство треугольника. Расстояние от точки до подпространства, угол между вектором и подпространством, расстояние между скрещивающимися подпространствами. Разложение вектора по ортонормальному базису. [Vinberg, гл. 5, §4], [Ar, гл. 7, §§1-3]

(12) Определения: изометрии (движения) евклидова пространства, группы $GL_n(R)$ (полная линейная), $SL_n(R)$ (специальная линейная), $O_n(R)$ (ортогональная), $SO_n(R)$ (специальная ортогональная). Примеры: группа $O_2(R)$, группа поворотов плоскости $SO_2(R)$, группа поворотов трёхмерного пространства $SO_3(R)$. Изометрия является линейным преобразованием. Классификация движений плоскости. [Vinberg, гл. 6, §3], [Ar, гл. 8, §§1-4] [Ki1, гл. 2]

(13) Определения: собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен оператора, диагонализуемые операторы. Собственные векторы с попарно различными собственными значениями линейно независимы. Вычисление степени оператора с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. [Vinberg, гл. 6, §§2,5], [Ar, гл. 4, §§3-7], [Ki1, гл. 8-9, 12]

(14) Определения: след оператора, сопряжённые (подобные) матрицы, минимальный и аннулирующий многочлен оператора. Матрицы оператора в разных базисах сопряжены. Теорема Гамильтона-Кэли. Алгоритм поиска минимального многочлена оператора (метод Крылова). [Vinberg, гл. 6, §2], [Ar, гл. 4, §§3-7], [Ki1, гл. 10, 13]

(15) Определения: спектр оператора, инвариантные и корневые подпространства оператора, прямая сумма подпространств. Пространство с оператором раскладывается в прямую сумму корневых подпространств. Критерий диагонализуемости оператора над полем комплексных чисел. [Vinberg, гл. 6, §4], [Ax], [Ar, гл. 12, §7], [Ki2, гл. 1-2]

(16) Определения: жорданова клетка, жорданов базис. Жорданова нормальная форма нильпотентного оператора. У каждого оператора над полем комплексных чисел есть жорданова нормальная форма. Явные формулы для рекуррентных последовательностей. [Vinberg, гл. 6, §4], [V], [Ar, гл. 12, §7], [Ki1, гл. 11], [Ki2, гл. 3]

Список литературы

[AV] В.И. Арнольд, *Истории давние и недавние*, Фазис, 2005

[AI] И.В. Арнольд, *Отрицательные числа в курсе алгебры*, (Серия "Педагогическая библиотека учителя") М.-Л., изд-во АПН РСФСР, 1947

[Ar] M. Artin, *Algebra*, Pearson, 2011

[Ax] Sh. Axler, *Down with determinants!*, American Mathematical Monthly **102** (1995), 139–154

[Vinberg] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры*, МЦНМО, 2019

[V] Н.Н. Воробьёв, *Числа Фибоначчи*, М., "Наука" 1978 г.

[Ka] Л.А.Калужин, *Основная теорема арифметики*, М., "Наука", 1969

[Ki1] В.А. Кириченко, *Линейная алгебра в задачах*, 2021

[Ki2] В.А. Кириченко, *Жорданова нормальная форма*, записки лекций, 2019

[KR] Р. Курант, Г. Роббинс, *Что такое математика?*. М., МЦНМО, 2013