Линейная алгебра в задачах

Валентина Кириченко

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Школьная плоскость и трёхмерное пространство

В задачах этого раздела используется известное со школы понятие координат на плоскости и в пространстве (если нужно вспомнить, что такое координаты на плоскости, то читайте [Геометрия, гл. 13 и 32]). Под вектором подразумевается направленный отрезок (= стрелка), соединяющий две точки плоскости. Векторы можно параллельно переносить в нужную точку плоскости. Складывать векторы нужно так же, как учат на уроках физики: по правилу треугольника (оно же правило параллелограмма).

1. Из центра правильного шестиугольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих шести, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

Векторы можно умножать на произвольные вещественные числа. Если число λ положительно, то векторы $\lambda\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA}$ сонаправлены, причём длина первого вектора равна длине второго вектора, умноженной на λ. Если $\lambda < 0$, то векторы $\lambda\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA}$ направлены в противоположные стороны, причём длина первого вектора равна длине второго вектора, умноженной на $(-\lambda)$. Если $\lambda = 0$, то $\lambda\overrightarrow{OA}$ — это нулевой вектор (то есть стрелка, у которой начало совпадает с концом).

2. На плоскости даны векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OX}$. Известно, что $\overrightarrow{AX} = 4\overrightarrow{XB}$. Найдите такие вещественные числа λ и μ, что выполнено равенство векторов:

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}.$$

3. На плоскости нарисованы (но не подписаны) векторы u, v, $u+2v$, $\frac{1}{2}(u+v)$, $u-v$ и $2u+v$. Чтобы воспроизвести рисунок, нарисуйте векторы с координатами $(-1,1)$, $(-1,5)$, $(0,2)$, $(1,3)$, $(1,7)$, $(2,2)$. Найдите координаты векторов u и v.

В школе обычно используют прямоугольную систему координат, но в линейной алгебре система координат может быть любой. Чтобы задать вектор координатами, нужно выбрать две пересекающиеся прямые (= оси координат), и на каждой прямой задать масштаб и положительное направление (например, отметить число 1). Более формально, можно выбрать два неколлинеарных вектора e_1 и e_2, и сказать, что их координаты — это $(1,0)$ и $(0,1)$. Тогда например, векторы $2e_1$, e_1+e_2, $\frac{e_2}{2}$ и $e_1 - e_2$ имеют координаты $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,\frac{1}{2})$ и $(1,-1)$, соответственно. В общем случае вектор $x_1e_1+x_2e_2$ имеет координаты (x_1,x_2) (убедитесь, что каждый вектор можно представить в виде $x_1e_1+x_2e_2$ для подходящих вещественных чисел x_1 и x_2).

4. Никон выбрал два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 на плоскости и так сопоставил каждому вектору v пару Н-координат (x_1,x_2), чтобы выполнялось тождество:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2.$$

Родион выбрал два других неколлинеарных вектора f_1 и f_2 и так сопоставил вектору v пару Р-координат (y_1,y_2), что

$$v = y_1f_1 + y_2f_2.$$

Известно, что векторы с Н-координатами $(1,2)$ и $(3,4)$ имеют Р-координаты $(1,4)$ и $(2,3)$, соответственно. Найдите Р-координаты вектора, имеющего Н-координаты $(5,8)$.

5. Лебедь, рак и щука тянут воз вдоль векторов $(1,-1,2)$, $(-2,1,-1)$ и $(1,1,-4)$, соответственно. Чему должны быть равны приложенные силы по абсолютной величине, чтобы воз был и ныне там?

6. $ABCDEFGH$ — куб в пространстве. Вершины куба обозначены таким образом, что $ABCD$ и $EFGH$ — грани куба, а AE — ребро куба. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AG}$ через векторы $u=\overrightarrow{AC}$, $v=\overrightarrow{AF}$ и $w=\overrightarrow{AH}$.

2. Линейные отображения и матрицы

Векторы можно задавать наборами координатами, то есть строками (или столбцами) чисел. Оказывается, простейшие преобразования плоскости тоже можно задавать наборами чисел, организованными в таблицы размера 2×2. Прямоугольные таблицы, заполненные числами, называются *матрицами*. Больше о матрицах можно прочесть в [Ar, гл. 1, §1] или [B, гл. 1, §9]).

Для запоминания. Линейному отображению

$$(x,y)\mapsto(ax+by,cx+dy)$$

плоскости в себя соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Почему мы записали набор чисел (a,b,c,d) в виде 2×2 матрицы, а не в виде 4×1 матрицы (то есть столбца чисел) или в виде 1×4 матрицы (то есть строки)? Потому что при такой записи линейное отображение удобно задаётся с помощью операции *умножения матрицы на столбец*. Пусть A — матрица размера 2×2, а X — столбец высоты 2. Определим их произведение AX:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\Rrightarrow\quad AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}.$$

Видно, что умножение матрицы на столбец состоит из двукратного применения операции *умножения строки на столбец*:

$$\boxed{a_{11}}\;\boxed{a_{12}}\;\cdot\;\begin{matrix}\boxed{x_1}\\ \boxed{x_2}\end{matrix}\;=\;\boxed{a_{11}x_1+a_{12}x_2}\;.$$

Умножение строки на столбец очень похоже на скалярное произведение векторов. В обоих случаях результат умножения — это число (хотя сомножители отнюдь не числа). Чтобы умножить матрицу на столбец, нужно сначала умножить первую строку матрицы на столбец, затем — вторую строку на столбец. Результаты (два числа) нужно записать в виде столбца: первый результат — в первой строке, второй результат — во второй строке.

7. Определите умножение матрицы $m\times n$ (то есть m строк и n столбцов) на столбец высоты n для

(а) $n=2$, $m=3$; (б) $n=m=3$.

8. Найдите матрицы следующих линейных отображений на плоскости с координатами x и y:

(а) отражение относительно прямой $\{x = y\}$,
(б) поворот на $\frac{\pi}{4}$ относительно начала координат,
(в) гомотетия с коэффициентом 10 относительно начала координат,
(г) проекция на ось x вдоль оси y.

9. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат. Найдите композицию $T \circ S$ отображений T и S.

Решение. Нарисуем вектор v, идущий из начала координат. Обозначим через φ угол между вектором v и осью x. Отразим v относительно горизонтальной оси (то есть применим отображение S). Мы получим новый вектор $S(v)$, который имеет ту же длину, что и v, но образует угол $(-\varphi)$ с осью x. Теперь повернём $S(v)$ против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат. Получим вектор $T(S(v))$, который составляет угол $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ с осью x. Поэтому композицию $T \circ S$ можно описать так: отображение $T \circ S$ переводит вектор v в вектор $T(S(v))$ той же длины, при этом угол между вектором $T(S(v))$ и вектором v равен $(\frac{\pi}{2} - 2\varphi)$, если мерять угол против часовой стрелки.

В первом решении мы несомненно нашли композицию $T \circ S$ — мы дали явный рецепт, как по вектору v строить вектор $T(S(v))$. Однако пользоваться этим рецептом не очень просто. Например, нужно хорошо разбираться в том, что такое угол (иначе не получится правильно применить рецепт в случае $(\frac{\pi}{2} - 2\varphi) < 0$). Запрограммировать этот рецепт (то есть объяснить его компьютеру) тоже не очень просто. Например, анимации (движение картинок) в CSS можно программировать двумя способами (в задаче 32 мы поговорим об этих способах подробней), но способ из нашего рецепта в CSS не предусмотрен.

Другое решение. Попробуем упростить рецепт из первого решения. Заметим, что если вектор v образует угол $\frac{\pi}{4}$ с осью x, то $T(S(v)) = v$. Поэтому прямая $\{x = y\}$ остаётся неподвижной при преобразовании $T \circ S$ — каждый вектор на этой прямой переходит в себя. Заметим, что и T, и S — это движения плоскости, то есть преобразования, которые сохраняют длины и углы. Поэтому их композиция $T \circ S$ тоже сохраняет длины и углы. Проверьте, что движение, у которого есть неподвижная прямая l, является либо тождественным преобразованием (то есть переводит каждый вектор в себя), либо отражением относительно прямой l.[1] Преобразование $T \circ S$ не тождественно (например, вектор, направленный вдоль оси y переходит в вектор, направленный вдоль оси x). Следовательно, $T \circ S$ является отражением относительно оси $\{x = y\}$.

Рецепт из второго решения гораздо проще и геометрически наглядней, чем рецепт из первого решения. Его легко применит любой школьник (или даже дошкольник), знающий, что такое осевая (зеркальная) симметрия. Правда, рецепт нельзя буквально запрограммировать, например, в CSS.

Третье решение. Попробуем решить задачу алгебраически. В координатах отображение S записывается так:

$$S : (x, y) \mapsto (x, -y).$$

[1] Это очень важный факт! Проверьте обязательно, если раньше не проверяли. И даже если проверяли, убедитесь, что вы по-прежнему умеете это доказывать.

Отображение T записывается так:

$$T : (x, y) \mapsto (-y, x).$$

Теперь вычислим $T \circ S$ в координатах:

$$(x, y) \xrightarrow{\text{S}} (x, -y) \xrightarrow{\text{T}} (-(-y), x).$$

Получаем $T \circ S : (x, y) \mapsto (y, x)$.

Рецепт из третьего решения легко запрограммировать, например, в CSS. Однако рецепт сложно объяснить школьнику, не владеющему методом координат. Линейная алгебра — это как раз то, что нужно выучить, чтобы легко пользоваться сразу двумя рецептами (и геометрическим, и алгебраическим). Какую бы задачу по линейной алгебре вы не решали, старайтесь прежде всего научиться свободно переходить от геометрического решения к алгебраическому, и обратно.

10. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат.

(а) Покажите, что композиция $S \circ T$ отображений S и T является отражением относительно некоторой прямой, и найдите эту прямую.

(б) Найдите матрицы отображений S, T и $S \circ T$.

Можно ли найти матрицу композиции $S \circ T$ преобразований S и T чисто алгебраически по матрицам преобразований S и T? Оказывается, есть операция *умножения матриц*, которая даёт нужный способ. Эта операция прямо обобщает операцию умножения матрицы на столбец. Пусть A и B — две матрицы размера 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Их произведением называется матрица размера 2×2

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы перемножить две матрицы 2×2 нужно разбить первую матрицу на две строки, а вторую матрицу — на два столбца, после чего произвести 4 операции умножения строки на столбец. Результат умножения i-той строки первой матрицы и j-того столбца второй матрицы нужно записать на пересечении i-той строки и j-того столбца матрицы произведения:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}\ a_{12}} \\ \boxed{a_{21}\ a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{a_{11}\ a_{12}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}}} & \boxed{\boxed{a_{11}\ a_{12}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}}} \\ \boxed{\boxed{a_{21}\ a_{22}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}}} & \boxed{\boxed{a_{21}\ a_{22}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}}} \end{pmatrix}.$$

11. Определите произведение двух матриц

(а) размеров 3×2 и 2×3;

(б) размеров 2×3 и 3×2;

(в) размера 3×3.

12. Через A_S и A_T, соответственно, обозначены матрицы линейных отображений S и T плоскости в себя. Проверьте, что произведение матриц соответствует композиции отображений, то есть матрица отображения $S \circ T$ совпадает с матрицей $A_S A_T$.

13. На плоскости с координатами (x, y) выпишите матрицу поворота против часовой стрелки на угол φ относительно начала координат.

14. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC с центром в начале координат.

(а) Опишите геометрически (как повороты, отражения, и т.п.) все движения плоскости, которые переводят треугольник ABC в себя.

(б) Пусть S — отражение относительно оси симметрии треугольника, проходящей через вершину A, а T — поворот против часовой стрелки относительно центра треугольника на угол $\frac{2\pi}{3}$. Опишите геометрически движения ST, T^2 и STS.

(в) Представьте каждое движение из пункта (а) в виде композиции движений S и T.

(г) Найдите матрицы движений из пункта (а) в какой-нибудь системе координат.

(д) Можно ли в пункте (г) выбрать систему координат так, чтобы все матрицы имели целые коэффициенты?

15. В трёхмерном пространстве с координатами (x, y, z) найдите матрицу поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = z\}$.

3. Векторные пространства

В задачах этого раздела используется аксиоматическое определение вещественного векторного пространства. Краткая версия определения приводится ниже, полную версию можно найти в [Ar, гл. 2, §1; гл. 3, §1] или [B, гл. 1, SS2, 7])

Для запоминания. В вещественном (скаляры = вещественные числа) векторном пространстве

1. векторы образуют абелеву группу по сложению;
2. умножение вектора на скаляр ассоциативно: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
3. умножение вектора на вещественное число 1 — это тождественное преобразование: $1v = v$;
4. умножение вектора на скаляр дистрибутивно и относительно сложения скаляров, и относительно сложения векторов:

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v; \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Из аксиоматического определения нельзя понять ни что такое векторное пространство, ни что такое вектор (предполагается, что у нас уже есть интуитивное представление об этих понятиях, основанное на личном опыте работы со школьной плоскостью и трёхмерным пространством). Зато из аксиом можно строго логически выводить теоремы, и эти теоремы будут верны для всех векторных пространств без исключения, какими бы экзотическими они ни были. Сейчас мы будем доказывать теоремы, а попутно знакомиться с полезными и интересными примерами векторных пространств.

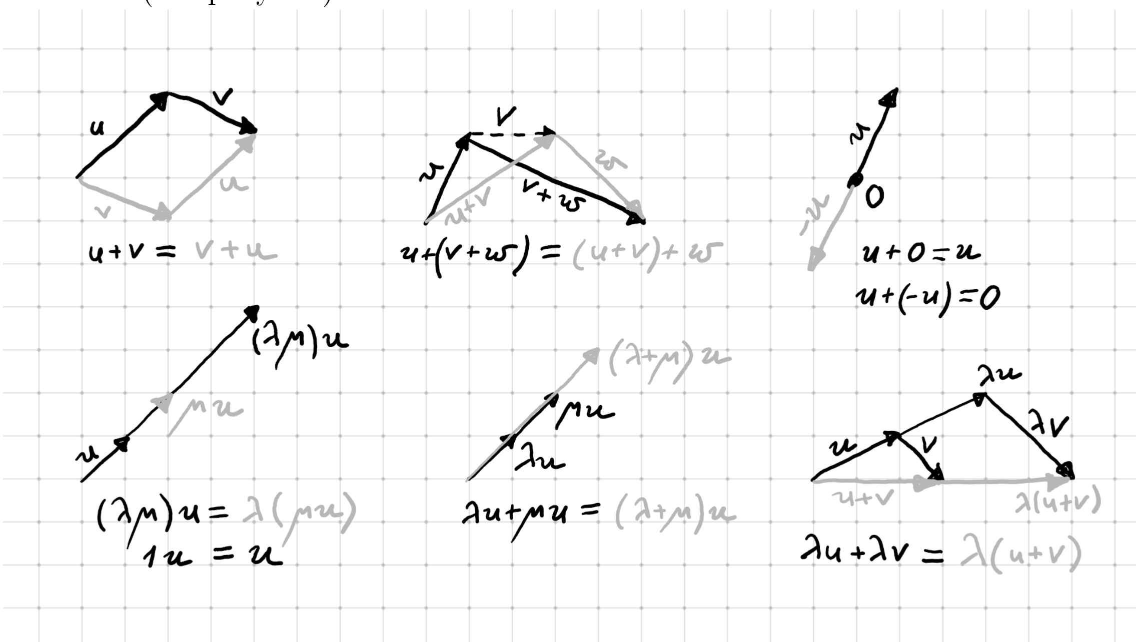
16. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ — множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2) вещественных чисел. Зададим на V структуру вещественного векторного пространства:

- $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ (сложение векторов);
- $\lambda(u_1, u_2) := (\lambda u_1, \lambda u_2)$ (умножение вектора на скаляр).

Проверьте, что V удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства.

Решение. Заметим, что упорядоченную пару (u_1, u_2) можно интерпретировать как координаты направленного отрезка u (= школьного вектора) на плоскости с координатами (x_1, x_2). Проверьте, что сложение школьных векторов u и v по правилу треугольника соответствует покоординатному сложению, то есть $w = u + v$ тогда и только тогда, когда $(w_1, w_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$.[2] Умножение школьных векторов на скаляр λ (= вещественное число λ) — это гомотетия с коэффициентом λ.

Геометрическая интерпретация сложения векторов и умножения вектора на скаляр позволяет нам наглядно убедиться, что все аксиомы векторного пространства выполнены (см. рисунок).



Что впрочем не означает, что эти аксиомы легко вывести строго логически из свойств школьной плоскости. Например, аксиома дистрибутивности

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

эквивалентна теореме о пропорциональных отрезках. Доказать последнюю не так-то непросто (см. [Ш]).

Другое решение. Выведем все аксиомы векторного пространства из свойств вещественных чисел. Поскольку $(u_1, u_2) = (u'_1, u'_2)$ тогда и только тогда, когда $u_1 = u'_1$ и $v_1 = v'_1$, все тождества можно проверять для первой и второй координаты по отдельности. Поэтому ниже индекс i пробегает два значения: 1 и 2.

(1) (a) $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2)$, потому что $u_i + v_i = v_i + u_i$ (*сложение вещественных чисел коммутативно*);

(b) $((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) = (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2))$, потому что $(u_i + v_i) + w_i = u_i + (v_i + w_i)$ (*сложение вещественных чисел ассоциативно*);

(c) существует нулевой вектор $(0, 0)$, потому что $v_i + 0 = v_i$ (*свойство вещественного числа* 0);

(d) для кажого вектора (v_1, v_2) существует обратный ему вектор $(-v_1, -v_2)$, потому что $v_i + (-v_i) = 0$ (*существование противоположного числа*);

(2) $(\lambda\mu)(v_1, v_2) = \lambda(\mu(v_1, v_2))$, потому что $(\lambda\mu)v_i = \lambda(\mu v_i)$ (*умножение вещественных чисел ассоциативно*);

[2]Это очень важный факт! Алгебраическое сложение векторов совпадает с геометрическим.

(3) $1(v_1, v_2) = (v_1, v_2))$, потому что $1 \cdot v_i = v_i$ (*свойство вещественного числа* 1);

(4) (a) $(\lambda + \mu)(v_1, v_2) = \lambda(v_1, v_2) + \mu(v_1, v_2)$, потому что $(\lambda + \mu)v_i = \lambda v_i + \mu v_i$ (*дистрибутивность вещественных чисел*);

(b) $\lambda((u_1, u_2)+(v_1+v_2)) = \lambda(u_1, u_2)+\lambda(v_1, v_2)$, потому что $\lambda(u_i+v_i) = \lambda u_i+\lambda v_i$ (*дистрибутивность вещественных чисел*).

Заметим, что во втором решении нам не пришлось напрягаться — решение свелось к формальному сравнению аксиом векторного пространства и свойств вещественных чисел. Нам не понадобилась теорема о пропорциональных отрезках. Однако свойства вещественных чисел тоже нелегко обосновать в рамках школьной геометрии. Например, попробуйте определить геометрически умножение вектора на $\sqrt{2}$ или на π. Так что во втором решении мы просто замели под ковёр сложности, связанные с понятием вещественного числа. Строгое построение вещественных чисел с доказательством всех их свойств выходит за рамки линейной алгебры и обычно проводится в курсе анализа.

17. Определите векторное пространство $\mathbb{R}^n$ для каждого натурального n.

Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ называется *координатным векторным пространством размерности* n. Его векторы по самой своей природе являются наборами вещественных чисел. Как мы позже выясним, векторы в абстрактном векторном пространстве тоже можно задавать наборами чисел (*координатами*). В конкретных задачах важно научиться выбирать координаты так, чтобы уменьшить объём вычислений.

18. Пусть V — множество всех квадратных трёхчленов, то есть таких функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x) = ax^2 + bx + c$ (коэффициенты a, b и c — вещественные константы). Зададим на V структуру вещественного векторного пространства:

(1) $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$ (сложение векторов);

(2) $(\lambda u)(x) := \lambda u(x)$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Проверьте, что V удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства.

(б) Найдите такой квадратный трёхчлен f, что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 20, \quad f(3) = 200.$$

Решение. (а) Сопоставим квадратному трёхчлену $f(x) = ax^2 + bx + c$ тройку чисел $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Легко проверить, что при таком сопоставлении сумме трёхчленов соответствует сумма векторов в $\mathbb{R}^3$, а умножению трёхчлена на скаляр соответствует умножение вектора в $\mathbb{R}^3$ на скаляр. Таким образом, мы можем отождествить V и $\mathbb{R}^3$ с сохранением всех операций. Тем самым, все аксиомы векторного пространства выполняются в V, поскольку они выполняются в $\mathbb{R}^3$.

(б) Будем искать неизвестные коэффициенты a, b и c, подставляя в тождество $f(x) = ax^2 + bx + c$ значения $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Получим три линейных уравнения на три неизвестных:

$$a + b + c = 2; \quad 4a + 2b + c = 20; \quad 9a + 3b + c = 200.$$

Мы пока не изучили высокотехнологичных методов решения систем линейных уравнений, но идея последовательного исключения переменных сработает здесь и без всякой техники. Вычтем из второго и третьего уравнения первое, чтобы избавиться от переменной c. Получим эквивалентную (то есть с тем же множеством решений) систему:

$$a + b + c = 2; \quad 3a + b = 18; \quad 8a + 2b = 198.$$

Теперь поделим все коэффициенты в третьем уравнении пополам и вычтем из результата второе уравнение, чтобы избавиться от переменной b:

$$a + b + c = 2; \quad 3a + b = 18; \quad a = 81.$$

Мы нашли $a = 81$, теперь можно найти $b = -225$ из второго уравнения, и $c = 146$ из третьего уравнения.

Оказывается, решение в пункте (б) не самое оптимальное. Есть более короткое решение (интерполяционная формула Лагранжа), основанное на другом выборе отождествления векторных пространств V и $\mathbb{R}^3$.

Другое решение. (а) Попробуем отождествить V и $\mathbb{R}^3$ так, чтобы проще было решить пункт (б). Сначала решим три вспомогательных задачи. Найдём такой трёхчлен f_1, что $f_1(1) = 1$ и $f_1(2) = f_1(3) = 0$. Поскольку 2 и 3 — корни трёхчлена f, получаем тождество $f(x) = a(x-2)(x-3)$. Подставляя в обе части $x = 1$, находим $a = \frac{1}{2}$. Аналогичным образом найдём такой трёхчлен f_2, что $f_2(2) = 1$ и $f_2(1) = f_1(3) = 0$, и такой трёхчлен f_3, что $f_3(3) = 1$ и $f_3(1) = f_3(2) = 0$. Получим

$$f_1 = \frac{1}{2}(x-2)(x-3); \quad f_2 = -(x-1)(x-3); \quad f_3 = \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Теперь отождествим V и $\mathbb{R}^3$ таким образом: сопоставим трёхчлену $f(x)$ тройку чисел $(f(1), f(2), f(3)) \in \mathbb{R}^3$. Проверим, что это взаимно-однозначное соответствие.

Действительно, если два трёхчлена f и g перешли в одну и ту же тройку, то $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$, $f(3) = g(3)$. Поэтому у трёхчлена $f - g$ будет три попарно различных корня: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Следовательно, $f - g = 0$,[3] то есть $f = g$. С другой стороны, любую тройку $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ можно представить как $(f(1), f(2), f(3))$. Достаточно взять $f(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + u_3 f_3(x)$.

Проверьте, что соответствие $f \mapsto (f(1), f(2), f(3))$ между V и $\mathbb{R}^3$ согласовано с операциями сложения векторов и умножения на скаляр.

(б) После артподготовки, проведённой в пункте (а), пункт (б) решается в одну строчку:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}(x-2)(x-3) + 20 \cdot (-(x-1)(x-3)) + 200 \cdot \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Отсюда мораль: на одном и том же векторном пространстве полезно рассматривать разные координаты, то есть разные отождествления между абстрактным векторным пространством и координатным пространством $\mathbb{R}^n$.

19 (Единственность нулевого вектора)**.** Докажите, что в векторном пространстве не может быть двух различных нулевых векторов.

Решение. Пусть 0_1 и 0_2 — два нулевых вектора (возможно различных, а возможно одинаковых). Мы хотим доказать, что $0_1 = 0_2$. Вычислим сумму $0_1 + 0_2$ двумя способами.

(1) $0_1 + 0_2 = 0_2$, потому что 0_1 — нулевой вектор.

(2) $0_1 + 0_2 = 0_1$, потому что 0_2 — нулевой вектор.

Отсюда получаем $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$, что и требовалось доказать.

20 (Единственность обратного вектора)**.** Докажите, что у каждого вектора в векторном пространстве есть ровно один обратный вектор.

[3] Здесь мы воспользовались важным фактом: если у многочлена степени n есть $n + 1$ попарно различных корней, то многочлен тождественно равен нулю. Если вы раньше не сталкивались с таким фактом, то обязательно подумайте, как его объяснить.

21. Студент Вася на лекции переписал с доски две теоремы о векторных пространствах:

(1) $0v = 0$;
(2) $\lambda 0 = 0$.

Чтобы различить $0_{\mathbb{R}}$ (вещественное число 0) и 0_V (нулевой вектор), лектор использовала цветные мелки, но при переписывании цвета не сохранились.

(а) Помогите Васе восстановить строгие формулировки обеих теорем.
(б) Докажите сформулированные вами в пункте (а) теоремы.

22. Пусть $V = \mathbb{R}^+$ — множество всех строго положительных вещественных чисел. Попробуем задать на V структуру вещественного векторного пространства:

- $u \boxplus v := uv$ (сложение векторов);
- $\lambda \odot u := u^\lambda$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Вычислите $(\lambda \odot u) \boxplus (\mu \odot v) \boxplus (\nu \odot w)$ для $\lambda = \mu = -1$, $\nu = 2$, $u = 2$, $v = w = 3$.
(б) Все ли аксиомы векторного пространства выполняются в V?
(в) Придумайте линейное отображение $T : V \to \mathbb{R}$, которое является биекцией.

23. Докажите, что в каждом вещественном векторном пространстве V для всех векторов $v \in V$ выполнено тождество:

$$(-1)v = -v.$$

(Если вам кажется, что тут нечего доказывать, то запишите формулировку теоремы в частном случае: для векторного пространства из предыдущей задачи. Какую формулу из школьной алгебры вы получили, и в каком классе эту формулу проходят?)

Решение. Эта формула обобщает сразу две формулы из школьной алгебры:

$$(-1) \cdot a = -a;$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

для всех вещественных чисел a. Первую формулу проходят в 5-ом классе, вторую — в 8-ом. Некоторых школьников эти формулы удивляют, а некоторым кажутся самоочевидными. Например, прямое следствие первой формулы — знаменитое тождество $(-1)(-1) = 1$, в которое не все верят, когда первый раз видят.

Мы не будем разбираться, верны ли эти формулы "на самом деле" (что бы это ни значило). Это вопрос философский. Мы докажем лишь, что если верны аксиомы векторного пространства, то верна формула

$$(-1)v = -v.$$

Сначала докажем равенсто $v + (-1)v = 0_V$. Действительно,

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0_{\mathbb{R}}v = 0_V.$$

В этой цепочке тождеств мы использовали аксиомы (какие именно?) и утверждение, которое мы ещё раньше вывели из аксиом. А именно, утверждение $0_{\mathbb{R}}v = 0_V$ (доказанное в задаче 21).

Далее, из равенства $v + (-1)v = 0_V$ следует, что v и $(-1)v$ обратны относительно сложения. Поэтому $(-1)v = -v$ (здесь мы пользуемся доказанной в задаче 20 единственностью обратного вектора).

24. Пусть V — множество всех бесконечных последовательностей вещественных чисел.

(а) Задайте на V структуру вещественного векторного пространства.

(б) Приведите пример линейного отображения $T : V \to V$, которое является инъекцией, но не является сюръекцией.

(в) Приведите пример сюръективного, но не инъективного линейного отображения $T : V \to V$.

Решение. (а) По аналогии со сложением векторов-строк и векторов-столбцов определим сумму последовательностей $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$ и $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ как

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots).$$

Определим умножение вектора u на скаляр λ как

$$\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \ldots).$$

Проверка аксиом векторного пространства для таких операций ничем не отличается от покоординатной проверки во втором решении задачи 16.

(б) Определим отображение правого сдвига

$$R : (u_1, u_2, u_3, \ldots) \mapsto (0, u_1, u_2, u_3, \ldots).$$

Это отображение переводит разные последовательности в разные (то есть инъективно). При этом R не сюръективно, так как последовательность $(1, 1, 1, \ldots)$ нельзя получить правым сдвигом ни из какой последовательности.

(в) Определим отображение левого сдвига

$$L : (u_1, u_2, u_3, \ldots) \mapsto (u_2, u_3, u_4, \ldots).$$

Это отображение сюръективно, так как каждую последовательность u можно получить левым сдвигом из последовательности $R(u)$. Иными словами, правый сдвиг R обратен справа левому сдвигу L, то есть композиция $L \circ R$ является тождественным преобразованием пространства V. При этом L не инъективно, так как последовательности $(1, 0, 0, \ldots)$ и $(0, 0, 0, \ldots)$ ($=$ нулевой вектор) переходят в одну и ту же последовательность.

В решении существенно использовалась бесконечномерность пространства последовательностей, то есть бесконечность набора чисел-координат, задающих последовательность. Это неспроста. Позднее мы докажем, что каждое инъективное линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сюръективно (а каждое сюръективное линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя — инъективно). Дело здесь обстоит примерно так же, как и в случае конечных и бесконечных множеств. Если множество X конечно, то отображение $f : X \to X$ инъективно тогда и только тогда, когда f сюръективно. Для бесконечных множеств это неверно (отель Гильберта — один из контрпримеров). В примере с последовательностями мы фактически воспользовались примерами инъективного, но не сюръективного, и сюръективного, но не инъективного отображений из множества натуральных чисел в себя.

25. Пусть X — произвольное множество. Обозначим через V множество всех отображений $f : X \to \mathbb{R}$.

(а) Задайте на V структуру вещественного векторного пространства.

(б) Покажите, что в случае, когда X конечно, векторное пространство V можно отождествить с $\mathbb{R}^n$ для некоторого натурального числа n. Как связаны n и X?

(в) Покажите, что в случае, когда X счётно, векторное пространство V можно отождествить с пространством всех вещественных последовательностей из предыдущей задачи.

26. Пусть V — множество единичных векторов на плоскости. Определим сложение векторов в V следующим образом. Если векторы u и $v \in V$ образуют углы φ и ψ, соответственно, с осью x, то их сумма $u \boxplus v$ — это единичный вектор, образующий угол $\varphi + \psi$ с осью x.

(а) Проверьте, что векторы образуют абелеву группу относительно операции $\boxplus$.

(б) Можно ли дополнить операцию $\boxplus$ сложения векторов на V какой-нибудь операцией $\odot$ умножения на скаляр так, чтобы V стало вещественным векторным пространством?

Решение. (б) Пусть v — вектор, образующий угол π с осью x. Тогда $v \neq 0$, зато $v + v = 0$. Как бы мы ни определили умножение на скаляр, из аксиом векторного пространства следует, что

$$v + v = 1v + 1v = (1 + 1)v = 2v.$$

Поэтому $2v = 0$. С другой стороны, из аксиом следует также, что

$$v = 1v = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) v = \frac{1}{2}(2v).$$

Получаем, что $v = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. Противоречие с тем, что $v \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что V никак нельзя дополнить операцией умножения на скаляр так, чтобы выполнялись все аксиомы вещественного векторного пространства.

27. Пусть V — множество единичных векторов на плоскости. Можно ли ввести на V структуру вещественного векторного пространства?

Решение. Это задача не про векторные пространства, а про равномощные множества. Можно построить биекцию f между окружностью S (= множество единичных векторов на плоскости) и вещественной прямой $\mathbb{R}$. На вещественной прямой есть структура векторного пространства. Эту структуру можно перенести на S с помощью биекции $f : S \to \mathbb{R}$:

$$u + v := f^{-1}(f(u) + f(v));$$

$$\lambda u := f^{-1}(\lambda f(u)).$$

Кстати, векторное пространство в задаче 22 было сгенерировано похожим образом — с помощью биекции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \ln(x)$ (тогда $f^{-1}(x) = e^x$).

Геометрического смысла в предыдущей задаче нет, зато видна сила абстрактных определений. Каждое множество мощности континуум можно превратить в вещественное векторное пространство (в частности, вектором может стать объект практически любой природы). Однако нас будут в первую очередь интересовать такие векторные пространства, в которых сложение векторов и умножение вектора на скаляр определены более естественным образом. Вещественные числа, векторы-столбцы, многочлены, последовательности и функции дают естественные примеры векторных пространств, а положительные вещественные числа и единичные векторы — менее естественные.

4. Линейные отображения

Линейные отображения между векторными пространствами — это математическая реализация простейших (или сознательно упрощённых) преобразований, которые приходят из физических задач. Например, тело движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют никакие силы. Даже если силы действуют (например, сила тяготения), то в первом приближении движение тела по криволинейной траектории (например, по параболе) хорошо описывается с помощью движения по прямой, которая касается траектории. Линейные отображения важны для понимания курсов математического анализа и дифференциальных уравнений.

Пусть U и V — вещественные векторные пространства. Отображение $T : U \to V$ называется *линейным*, если во-первых, для любой пары векторов u_1 и u_2 из U выполнено тождество:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2),$$

а во-вторых, для любого вектора $u \in U$ и скаляра λ выполнено тождество

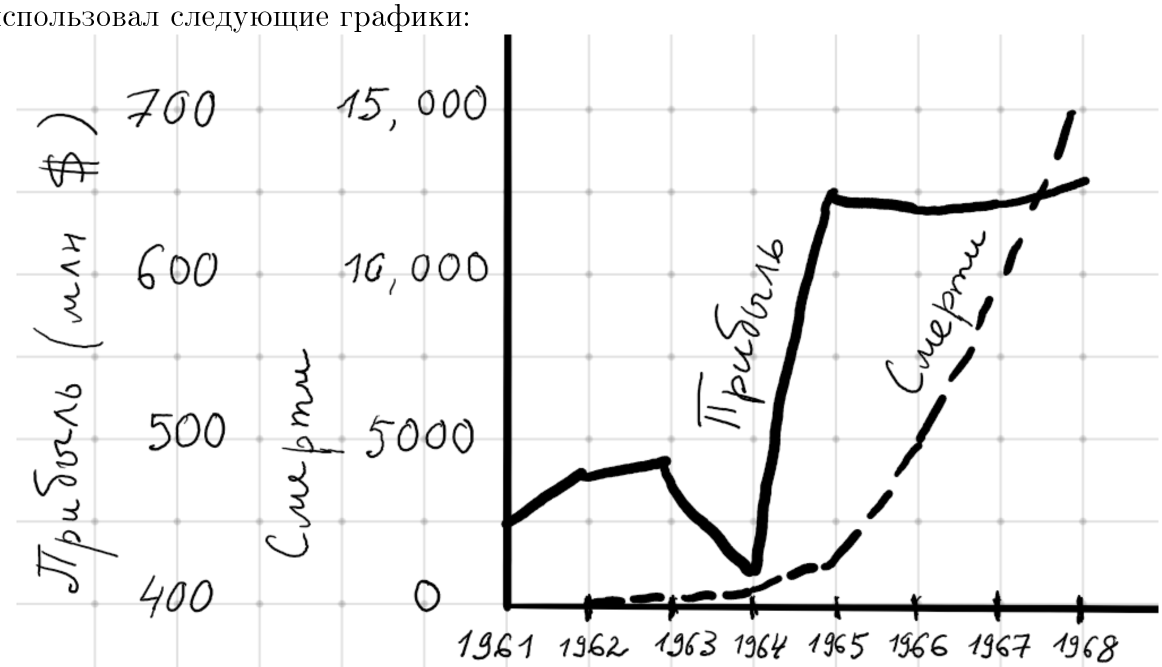
$$T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Научно выражаясь, T коммутирует с операциями сложения в U и V и с операциями умножения на скаляр.

Если $U = V$, то линейное отображение T часто называют *линейным оператором.*

28. Пусть U и V — векторные пространства, а $T : U \to V$ — линейное отображение. Докажите, что $T(0) = 0$.

29. Математик Нил Коблиц в 1969 году агитировал рабочих одного из заводов компании Дженерал Электрик протестовать против войны во Вьетнаме. В частности, он использовал следующие графики:



Как нужно поменять одну из шкал по вертикальной оси, чтобы графики не вызывали у неискушенного зрителя впечатления, будто прибыли компании служат причиной гибели солдат?

30. Пусть V — векторное пространство квадратных трёхчленов из задачи 18. Какие из следующих отображений $T : V \to V$ являются линейными?

(а) $[T(f)](x) = f(x) + 2$; (б) $[T(f)](x) = f(x+2)$; (в) $[T(f)](x) = f(x) + x$;

(г) $[T(f)](x) = f(2x)$; (д) $[T(f)](x) = f(2x+1)$.

Для запоминания. Отображение $T : V \to W$ между двумя вещественными векторными пространствами является линейным тогда и только тогда, когда

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \ldots + \lambda_\ell T(v_\ell)$$

для любого набора векторов $v_1, v_2, \ldots, v_\ell \in V$ и любого набора скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$.

31. Докажите вышеприведённую теорему по индукции.

Повороты и отражения на школьной плоскости задают линейные отображения, если сохраняют начало координат. Вообще, любое движение (то есть преобразование, сохраняющее расстояния) плоскости или пространства, сохраняющее начало координат, является линейным преобразованием. В самом деле, если векторы u_1 и u_2 перешли в векторы $T(u_1)$ и $T(u_2)$, то параллелограмм, натянутый на векторы u_1 и u_2, должен перейти в параллелограмм, натянутый на $T(u_1)$ и $T(u_2)$ (тут мы используем, что движение переводит каждый треугольник в равный ему треугольник). Поэтому $u_1 + u_2$ перейдёт в $T(u_1) + T(u_2)$. Попробуйте сами доказать, что выполняется и свойство $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, в частности, движение переводит прямые в прямые (тут пригодится неравенство треугольника).

32. Веб-дизайнер Петя преобразовал квадрат с помощью такого CSS кода:
`rotate(-45deg) scale(2, 3) rotate(45deg)`
(на русском языке это означает, что сначала квадрат повернули на 45° против часовой стрелки относительно начала координат, потом результат растянули по оси x в два раза, а по оси y — в три раза, и наконец повернули на 45° по часовой стрелке тоже относительно начала координат).
(а) Нарисуйте образ квадрата при Петином преобразовании.[4]
(б) Проверьте, что Петино преобразование линейно.
(в) Помогите Пете записать его преобразование в матричной форме:
`matrix(a,b,c,d,0,0)`
(то есть найдите такие константы a, b, c и d, что (x, y) преобразуется в $(ax+by, cx+dy)$ для всех пар (x, y) вещественных чисел).

33. Постройте графики отображений:
(а) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$.
(б) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$.
(в) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $T : t \mapsto (t, t)$.
(г) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $T : t \mapsto (t, t^2)$.
Какие из этих отображений являются линейными?

34. Классифицируйте все линейные отображения из (а) прямой в другую прямую, (б) из плоскости в прямую, (в) из прямой в плоскость, (г) из плоскости в другую плоскость, (д) из трёхмерного пространства в плоскость и (е) из плоскости в трёхмерное пространство.

[4] Можете себя проверить здесь https://www.w3schools.com/css/css3_2dtransforms.asp

Решение. (а) Пусть $T : L_1 \to L_2$ — линейное отображение из прямой L_1 в прямую L_2. Выберем на прямой L_1 какой-нибудь ненулевой вектор u. Тогда каждый вектор $v \in L_1$ единственным образом представляется как xu для некоторого $x \in \mathbb{R}$. Будем называть x *координатой* вектора v. Аналогично введём координату y на прямой L_2. В координатах x и y отображение T задаётся функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то есть вектор с координатой x под действием оператора T переходит в вектор с координатой $y = f(x)$. Тогда линейность отображения T означает, что функция f удовлетворяет следующим двум свойствам:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ и } f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Из второго свойства следует (если подставить $x = 1$), что $f(\lambda) = \lambda f(1)$ для любого вещественного числа λ. Поэтому f обязательно имеет вид $f(x) = kx$ для некоторой вещественной константы k. Легко проверить, что функция $y = kx$ удовлетворяет и первому свойству. Действительно,

$$f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = f(x_1) + f(x_2).$$

Тем самым, все линейные отображения из L_1 в L_2 классифицируются одним вещественным параметром k.

35. Дано линейное отображение $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Известно, что

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Найдите такую матрицу A, что для любого вектора $X \in \mathbb{R}^3$ и его образа $Y = T(X)$ выполнено матричное тождество: $AX = Y$.

36. (а) Докажите, что каждое линейное отображение трёхмерного пространства в себя переводит прямую либо в прямую, либо в нулевой вектор.

(б) Дайте определение прямой в произвольном векторном пространстве и обобщите утверждение пункта (а).

Цель следующих шести задач — классификация движений школьной плоскости. Нас будут интересовать все движения, не обязательно сохраняющие начало координат.

37. Докажите, что каждое движение плоскости M однозначно определяется образами $M(A)$, $M(B)$, $M(C)$ трёх попарно различных точек A, B и C.

38. (а) Докажите, что каждое движение плоскости можно представить в виде композиции одного, двух или трёх отражений.

(б) Покажите, что композиция чётного числа отражений сохраняет ориентацию плоскости (то есть переводит букву “Г” в букву “Г”), а композиция нечётного числа отражений меняет ориентацию (то есть переводит букву “Г” в букву “L”).

39. (а) Докажите, что композиция двух отражений — это либо поворот, либо параллельный перенос.

(б) Докажите, что каждый поворот можно представить в виде композиции двух отражений.

(в) Докажите, что каждый параллельный перенос можно представить в виде композиции двух отражений.

40 (Теорема Шаля)**.** Каждое собственное (= сохраняющее ориентацию) движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос. Докажите!

41. Из теоремы Шаля следует, что композиция двух поворотов — это либо поворот, либо параллельный перенос. Пусть R_1 — это поворот на угол α вокруг точки A, а R_2 — поворот на угол β вокруг точки B.

(а) При каких условиях на α, β, A и B композиция $R_1 \circ R_2$ окажется параллельным переносом? На какой вектор?

(б) Постройте центр и угол поворота $R_1 \circ R_2$, если это поворот.

42. Докажите, что каждое несобственное движение плоскости — это либо отражение, либо скользящая симметрия.

43 ($\star$). Линейное отображение $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задано формулой:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Является ли T движением пространства? Если является, то опишите T геометрически (вращение, отражение,...).

5. Базис и размерность

Чтобы решать практические задачи с помощью линейной алгебры, удобно использовать координаты. Координаты можно ввести на произвольном вещественном векторном пространстве V с помощью базиса. Набор векторов $(v_\alpha)_{\alpha \in X}$ из V, занумерованный элементами какого-нибудь множества X называется *базисом*, если (v_α) — минимальный порождающий набор. Осталось определить эпитеты “порождающий” и “минимальный” в контексте векторных пространств.

Набор (v_α) — *порождающий*, если каждый вектор $v \in V$ можно представить в виде конечной линейной комбинации векторов из набора, то есть для некоторых λ_1, $\lambda_2,\ldots,$ $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$ и некоторых α_1, $\alpha_2,\ldots,$ $\alpha_\ell \in X$ выполнено тождество:

$$v = \lambda_1 v_{\alpha_1} + \lambda_2 v_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_\ell v_{\alpha_\ell}.$$

44. В этой задаче V — координатная плоскость из задачи 16.

(а) Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Покажите, что набор векторов $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$, $v_3 = (0, 1)$ является порождающим.

(б) Приведите пример порождающего набора из двух векторов.

(в) Приведите пример не порождающего набора из двух ненулевых попарно различных векторов.

(г) Докажите, что не существует порождающего набора из одного вектора.

Теперь нужно определить, что такое *минимальный* порождающий набор. Хочется сказать, что это порождающий набор с минимальным количеством векторов, но такое определение не сработает в случае, когда все порождающие наборы состоят из бесконечного количества векторов. Если в пространстве есть конечный порождающий набор, то пространство называется *конечномерным*, а если нет — *бесконечномерным*.

45. Пусть V — пространство бесконечных вещественных последовательностей из задачи 24.

(а) Докажите, что в V нет конечного порождающего набора векторов.

(б) Приведите пример бесконечного порождающего набора векторов в V.

(в) Можно ли построить счётный порождающий набор векторов в V?

Чтобы не бороться с бесконечностью, определим *минимальный* порождающий набор, как минимальный по включению. То есть порождающий набор $(v_\alpha)_{\alpha\in X}$ минимален, если для любого подмножества $Y \subset X$, не совпадающего с X, набор $(v_\alpha)_{\alpha\in Y}$ не является порождающим.

46. Докажите, что порождающий набор из пункта (а) задачи 44 не минимален. Найдите все такие подмножества $Y \subset X = \{1, 2, 3\}$, что набор $(v_i)_{i\in Y}$ тоже порождающий.

47. Постройте какой-нибудь базис в координатном пространстве $\mathbb{R}^n$.

48. Определим множество многочленов $\mathbb{R}[x]$ как множество всех *полиномиальных* функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то есть таких функций, которые можно задать формулой

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

для некоторых вещественных констант a_0, a_1,…,a_n.

(а) Задайте на $\mathbb{R}[x]$ структуру вещественного векторного пространства (например, по аналогии с задачей 18).

(б) Постройте какой-нибудь базис в $\mathbb{R}[x]$.

(в) Можно ли построить в $\mathbb{R}[x]$ конечный базис?

В дальнейшем мы докажем теорему, что в каждом конечномерном векторном пространстве можно построить базис. Отсюда следует, что можно построить бесконечно много разных базисов.

49. Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — базис в пространстве V. Покажите, что следующие наборы векторов — тоже базисы в V:

(а) $(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n)$, где λ_1, λ_2,…, λ_n — ненулевые скаляры.

(б) $(v_1, v_2 + \lambda_2 v_1, \ldots, v_n + \lambda_n v_1)$, где λ_2,…, λ_n — произвольные скаляры.

(в) $(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$, где $\sigma : \{1, 2 \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ — произвольная биекция.

Мы также докажем теорему, что любые два базиса в конечномерном пространстве состоят из одинакового количества векторов. Это количество называется *размерностью* пространства, и обозначается $\dim V$.

50. Пусть $(e_1,\ldots, e_n)$ — базис в конечномерном векторном пространстве V. Докажите, что каждый вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где x_1,…, x_n — скаляры. Такое представление называется *разложением вектора по базису*, а набор скаляров $(x_1, \ldots, x_n)$ называется *координатами* вектора.

Решение. Сначала заметим, что ни один базисный вектор e_i нельзя представить в виде линейной комбинации остальных базисных векторов. Действительно, если есть разложение

$$e_i = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_{i-1}e_{i-1} + \mu_{i+1}e_{i+1} + \ldots + \mu_n e_n,$$

то набор $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ — тоже порождающий (вместо e_i можно всюду подставлять его разложение по остальным базисным векторам). Это противоречит минимальности порождающего набора $(e_1, \ldots, e_n)$.

Поскольку $(e_1, \ldots, e_n)$ — порождающий набор, у каждого вектора v будет хотя бы одно разложение по базису:

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Предположим, что есть второе разложение:

$$v = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n.$$

Докажем, что оно совпадает с первым. Для этого вычтем второе разложение из первого. Получим

$$0 = (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) - (y_1e_1 + \ldots + y_ne_n) = (x_1 - y_1)e_1 + \ldots + (x_n - y_n)e_n.$$

Если хотя бы один из коэффициентов $x_i - y_i \neq 0$, то мы можем поделить на него:

$$0 = \frac{x_1 - y_1}{x_i - y_i}e_1 + \ldots + \frac{x_{i-1} - y_{i-1}}{x_i - y_i}e_{i-1} + e_i + \frac{x_{i+1} - y_{i+1}}{x_i - y_i}e_{i+1} + \ldots + \frac{x_n - y_n}{x_i - y_i}e_n.$$

Отсюда получится разложение вектора e_i по остальным базисным векторам:

$$e_i = -\frac{x_1 - y_1}{x_i - y_i}e_1 - \ldots - \frac{x_{i-1} - y_{i-1}}{x_i - y_i}e_{i-1} - \frac{x_{i+1} - y_{i+1}}{x_i - y_i}e_{i+1} - \ldots - \frac{x_n - y_n}{x_i - y_i}e_n.$$

Но как мы уже выяснили, это противоречит минимальности набора $(e_1, \ldots, e_n)$. Поэтому $x_i - y_i = 0$ для всех i, то есть два разложения вектора v по базису обязательно совпадают.

В частности, каждый базисный вектор единственным образом раскладывается по базису:

$$e_i = 0e_1 + \ldots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \ldots + 0e_n.$$

Получаем биекцию между базисом $(e_1, \ldots, e_n)$ и стандартным базисом в $\mathbb{R}^n$.

51. В задаче 50 мы убедились, что выбор базиса задаёт биекцию между произвольным конечномерным пространством V размерности n и координатным пространством $\mathbb{R}^n$: вектор $v \in V$ переходит в набор координат $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Проверьте, что эта биекция является линейным отображением (то есть задаёт *изоморфизм* векторных пространств).

52. Покажите, что многочлены

$$f_1 = \frac{1}{2}(x-2)(x-3); \quad f_2 = -(x-1)(x-3); \quad f_3 = \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

образуют базис в векторном пространстве квадратных трёхчленов из задачи 18. Чему равны координаты вектора x^2 в этом базисе?

Чтобы удобней было работать с базисами (в частности, доказывать теоремы о них без лишних вычислений) в линейной алгебре используется понятие *линейной зависимости*. Набор векторов $(v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$ называется *линейно зависимым*, если найдутся такие скаляры λ_1, λ_2,..., λ_ℓ, что

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell = 0,$$

и при этом скаляры не равны нулю одновременно.

Важно заметить две вещи. Во-первых, линейная зависимость — это свойство данного набора векторов, а не каких-то отдельных векторов из набора. В частности, на вопрос “Являются ли эти пять векторов линейно зависимыми?” никак нельзя ответить “Эти два линейно зависимы, а вот те три — нет.”

Во-вторых, набор векторов — это не то же самое, что множество векторов. В частности, набор (v_1, v_2), в котором $v_1 = v_2$, всегда линейно зависим (проверьте!), и не совпадает со множеством $\{v_1, v_2\} = \{v_1\}$. Линейная зависимость — удобный термин из языка линейной алгебры, но нужно учиться грамотно его использовать (как впрочем и любые другие слова из новых языков).

В решении задачи 50 мы фактически использовали следующее полезное свойство линейно зависимого набора.

Для запоминания. Набор векторов $(v_1, \ldots, v_\ell)$ в вещественном векторном пространстве V линейно зависим тогда и только тогда, когда для некоторого i найдутся такие скаляры $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_\ell)$, что выполнено тождество:

$$v_i = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_\ell v_\ell.$$

53. (а) Докажите вышеприведённую теорему.

(б) Приведите пример линейно зависимого набора, в котором *ровно один* вектор из набора представляется в виде линейной комбинации остальных векторов.

(в) Приведите пример линейно зависимого набора из 2021 вектора, в котором *каждый* вектор из набора представляется в виде линейной комбинации остальных векторов.

Решение. (а) Докажем, что если векторы линейно зависимы, то один из них выражается через остальные (часть “тогда”). Если векторы $(v_1, \ldots, v_\ell)$ линейно зависимы, то

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell = 0,$$

где хотя бы один скаляр $\lambda_i \neq 0$. Поделим на λ_i:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + v_i + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_i} v_\ell = 0.$$

Положим $\mu_j = -\lambda_j \lambda_i$ при $j \neq i$. Тогда из предыдущего тождества следует, что

$$v_i = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_\ell v_\ell.$$

Теперь докажем, что если один из векторов набора выражается через остальные, то все векторы вместе линейно зависимы (часть “только тогда”). Пусть

$$v_i = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_\ell v_\ell.$$

Положим $\lambda_i = -1$ и $\lambda_j = \mu_j$ при $j \neq i$. Тогда из предыдущего тождества следует, что

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell = 0,$$

причём $\lambda_i = -1 \neq 0$.

(б) Заметим, что если набор векторов $(v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$ содержит нулевой вектор 0, то такой набор линейно зависим. В самом деле, пусть $v_i = 0$. Тогда

$$0v_1 + \ldots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_\ell = 0,$$

а коэффициент при v_i не равен нулю. Поэтому если взять набор (v_1, v_2), где $v_1 = 0$, а $v_2 \neq 0$, то такой набор линейно зависим, и при этом только вектор v_1 выражается через остальные векторы. Действительно, $v_1 = 0v_2$, но вектор $v_2 \neq \lambda v_1$ ни для какого скаляра λ, поскольку $\lambda v_1 = \lambda 0 = 0$, а $v_2 \neq 0$ (здесь мы воспользовались двумя утверждениями из задачи 21).

(в) Возьмём два линейно независимых вектора u и v на плоскости, и рассмотрим набор $(v_1, v_2, \ldots, v_{2021})$, в котором все векторы с чётными номерами равны u, а все векторы с нечётными номерами равны v. Тогда $v_1 - v_3 = 0$, поэтому набор линейно зависим. При этом каждый вектор выражается через остальные, а именно, $v_1 = v_3$, $v_2 = v_4$ и $v_i = v_{i-2}$ при $i > 2$.

Другое решение. Другое решение в пункте (в) можно получить, взяв какой-нибудь базис $(v_1, \ldots, v_{2020})$ в 2020-мерном пространстве (например, стандартный базис в $\mathbb{R}^{2020}$), и добавив к нему вектор $v_{2021} = v_1 + \ldots + v_{2020}$. Тогда векторы $(v_1, \ldots, v_{2021})$ линейно зависимы, поскольку:

$$1v_1 + \ldots + 1v_{2020} + (-1)v_{2021} = 0,$$

причём все коэффициенты в линейной зависимости отличны от нуля. Поэтому из решения пункта (а) следует, что каждый вектор из набора можно выразить через остальные.

54. (а) Докажите, что каждые три вектора на плоскости линейно зависимы.

(б) Докажите, что каждый базис на плоскости состоит из двух элементов.

55. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на вещественной прямой (это пространство получается как частный случай конструкции из задачи 25 для $X = \mathbb{R}$).

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

(в) Изменятся ли ответы в пунктах (а) и (б), если ограничить функции на отрезок $[0, 1]$, и рассматривать их как векторы в пространстве всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$ (это пространство получается как частный случай конструкции из задачи 25 для $X = [0, 1]$)?

56. Докажите эквивалентность трёх определений базиса векторного пространства.

(1) Базис — это минимальный (по включению) порождающий набор векторов.
(2) Базис — это линейно независимый порождающий набор векторов.
(3) Базис — это максимальный (по включению) линейно независимый набор векторов.

57. В этой задаче дело происходит в векторном пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ из задачи 48.

(а) Представьте вектор x^3 как линейную комбинацию векторов 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$.

(б) Являются ли векторы 1, $(x-1)^2$, $(x-2)^3$, x^3 линейно зависимыми?

58. Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу $n \times n$, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит 1, а все остальные коэффициенты равны 0.

(а) Для каждой матрицы E_{ij} при $n = 3$ опишите геометрически линейное отображение трёхмерного пространства в себя, заданное матрицей E_{ij} (например, представьте E_{ij} в виде композиции проекционного оператора и вращения).

(б) Докажите матричные тождества:

$$E_{ij}E_{jk} = E_{ik}; \quad E_{ij}E_{j'k} = 0 \text{ при } j \neq j'.$$

Каков геометрический смысл этих тождеств?

59. (а) Введите на множестве $\mathrm{Mat}_{m \times n}$ матриц размера $m \times n$ структуру вещественного векторного пространства.

(б) Предъявите базис в пространстве $\mathrm{Mat}_{m \times n}$. Чему равна размерность?

60. (а) Покажите, что векторное пространство $\mathrm{Mat}_{n \times n}$ квадратных матриц является вещественной *алгеброй*, то есть сложение матриц, умножение матрицы на скаляр и умножение матриц удовлетворяют следующим трём аксиомам:

(1) $(A + B)C = AC + BC$ (правая дистрибутивность)

(2) $C(A+B) = CA + CB$ (левая дистрибутивность)
(3) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$ (согласованность с умножением на скаляр)

(б) Докажите, что алгебра из пункта (а) ассоциативна, но не коммутативна.

61. Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется диагональной, если все её коэффициенты кроме (возможно) a_{11}, $a_{22}, \ldots$, a_{nn} равны нулю.

(а) Проверьте, что диагональные матрицы образуют подпространство в пространстве $\mathrm{Mat}_{n\times n}$, и найдите размерность этого подпространства.

(б) Для диагональной матрицы $D = 2E_{11} + \frac{1}{3}E_{22} + \frac{1}{2}E_{33}$ при $n = 3$ опишите геометрически линейное отображение трёхмерного пространства в себя, заданное матрицей D. Опишите примерно трёхмерное тело, в которое переходит единичный куб при отображении D^{10}.

(в) Проверьте, что произведение двух диагональных матриц — снова диагональная матрица.

(г) Пусть $D = \lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{22} + \ldots + \lambda_n E_{nn}$. Найдите все матрицы A, которые коммутируют с D (то есть $AD = DA$).

62. Обозначим через R_φ поворот плоскости на угол φ против часовой стрелки относительно начала координат.

(а) Убедитесь, что $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$ и $R_\varphi \circ R_\psi^{-1} = R_{\varphi-\psi}$.

(б) Обозначим через A_φ матрицу поворота R_φ. Вычислите A_φ, A_ψ, A_ψ^{-1}, $A_{\varphi+\psi}$ и $A_{\varphi-\psi}$.

(в) Выведите из матричных тождеств $A_\varphi A_\psi = A_{\varphi+\psi}$ и $A_\varphi A_\psi^{-1} = A_{\varphi-\psi}$ школьные формулы для косинуса и синуса суммы и разности.

63. (а) Пусть H_ρ — гомотетия плоскости с коэффициентом $\rho > 0$ и центром в начале координат, а R_φ — поворот на угол φ против часовой стрелки относительно начала координат. Найдите матрицу композиции $H_\rho \circ R_\varphi$.

(б) Покажите, что вещественная матрица вида

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

является матрицей композиции $H_\rho \circ R_\varphi$ для некоторых $\rho > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Чему равны ρ и φ, если $a = b = 1$?

(в) Обозначим через $\mathfrak{C}$ множество всех матриц $M(a,b)$ из пункта (б). Проверьте, что сумма, разность и произведение двух матриц из $\mathfrak{C}$ тоже лежит в $\mathfrak{C}$.

(г) Найдите такую матрицу $\mathbf{1} \in \mathfrak{C}$, что $\mathbf{1}M = M = M\mathbf{1}$ для всех $M \in \mathfrak{C}$.

(д) Покажите, что если $(a,b) \neq (0,0)$, то у матрицы $M = M(a,b)$ есть обратная матрица относительно умножения (то есть такая матрица M^{-1}, что $MM^{-1} = M^{-1}M = \mathbf{1}$).

(е) Найдите такую матрицу $\mathbf{i} \in \mathfrak{C}$, что $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$.

(ж) Вспомните или прочитайте определение поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Постройте изоморфизм между $\mathfrak{C}$ и $\mathbb{C}$.

64 ($\star$)**.** Выведите из леммы Цорна, что в каждом векторном пространстве существует базис.

6. Метод Гаусса

Метод Гаусса — это алгоритм для решения систем линейных уравнений, основанный на простых манипуляциях со строками матрицы. Интересно, что метод был известен уже древнекитайским математикам под названием Фан Чэн, что в примерном переводе означает “прямоугольные таблицы”. Причём в дошедшем до нас изложении этого метода (восьмая книга в трактате “Девять книг о математике”) текстовая задача прямо преобразуется в матрицу — никаких уравнений не выписывается. То есть метод Гаусса или Фан Чэн — это чисто арифметический метод, не требующий алгебры. И сами манипуляции с матрицами вполне может проделать ученик начальной школы. Однако объяснить, почему этот метод действительно работает, удобней на алгебраическом языке.

Пусть у нас есть система из m линейных уравнений на n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Это означает, что для каждого $i = 1, \ldots, m$ задано уравнение:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i.$$

Такую систему уравнением удобно задавать с помощью операции умножения матриц. Действительно, левую часть каждого уравнения можно воспринимать как результат умножения n-строки из коэффициентов на n-столбец из переменных, поэтому в матричной форме каждое уравнение запишется так:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i.$$

Отсюда получается следующий способ записи:

Для запоминания. Система из m линейных уравнений на n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ записывается в матричной форме как $AX = B$, где A — это $m \times n$ матрица (матрица коэффициентов), B — столбец $m \times 1$ (столбец правых частей), и X — столбец $n \times 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

65. Последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *арифметической*, если каждый её член, кроме первого и последнего, является средним арифметическим двух соседних членов. Составьте систему уравнений, множество решений которой совпадает со множеством всех арифметических последовательностей длины n. Запишите систему уравнений в матричной форме.

Обычно системы линейных уравнений решают последовательным исключением переменных. Например, если переменная x_1 входит в первое уравнение с ненулевым коэффициентом a_{11}, то можно вычесть из второго уравнения первое, умноженное на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. После этого во втором уравнении переменная x_1 исчезнет. Кроме того, иногда бывает удобно умножить все коэффициенты уравения на какое-то ненулевое число. Такого рода манипуляции с уравнениями позволяют заменять одну систему уравнений на эквивалентную ей, но более простую систему (напомним, что две системы уравнений эквивалентны, если они имеют одинаковые множества решений).

66. Какие из следующих систем линейных уравнений эквивалентны?

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x + 5y + 2z = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x + 7y + 3z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases}.$$

Вместо манипуляций с уравнениями можно сразу работать с матрицей коэффициентов и столбцом правых частей (для удобства их часто записывают рядом в виде $m \times (n+1)$ матрицы). Определим три типа *элементарных преобразований строк* матрицы:

(1) Строка R_i с номером i заменяется на сумму $R_i + \lambda R_j$, где R_j — строка с номером j, а λ — произвольный скаляр.

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & | & b_i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} & | & b_i+\lambda b_j \end{pmatrix}$$

(2) Строка R_i заменяется на λR_i, где λ — ненулевой скаляр.

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & | & b_i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} & | & \lambda b_i \end{pmatrix}$$

(3) Строки R_i и R_j меняются местами.

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & | & b_i \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & | & b_j \end{pmatrix}$$

Преобразования первых двух типов меняют ровно одну строку матрицы. Их уже достаточно для реализации метода Гаусса. Преобразование третьего типа добавлено для удобства, чтобы сократить количество шагов в алгоритме.

67. Проверьте, что элементарное преобразование третьего типа можно реализовать как композицию преобразований первых двух типов.

Цель метода Гаусса — построить эквивалентную систему, где каждое уравнение содержит такую переменную, которая ни в каком другом уравнении не встречается. Более формально, в столбце матрицы коэффициентов, который соответствует этой переменной, стоит ровно один ненулевой коэффициент.

68. (а) В трёхмерном пространстве с координатами (x, y, z) даны три плоскости:

$$\Pi_1 = \{3x + 2y + z = 39\}, \quad \Pi_2 = \{2x + 3y + z = 34\}, \quad \Pi_3 = \{x + 2y + 3z = 26\}.$$

Найдите их пересечение $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

(б) Пусть $AX = B$ — система уравнений, задающая пересечение трёх плоскостей в трёхмерном пространстве. Для каждого комбинаторного типа ступенчатой формы матрицы A опишите геометрически (точка, прямая,...) множество решений системы $AX = B$ (ответ будет зависеть также и от B).

69. Приведите матрицу A к ступенчатой форме методом Гаусса:

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

(в) Опишите все решения системы $AX = 0$.

(г) Для каких столбцов B система $AX = B$ имеет решение?

70. (а) Найдите линейную зависимость между столбцами матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}.$$

(б) Многочлен $f(x)$ степени не выше три принимает в точках 1, 2, 3 и 4 значения y_1, y_2, y_3 и y_4, соответственно. Найдите $f(5)$. Подсказка: если $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, то справедливо матричное тождество (с матрицей A из пункта (а):

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \end{pmatrix}.$$

71. Существуют ли такая 2×3 матрица A и такая 3×2 матрица B, что

$$\text{(а) } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

72. Пусть M — “таблица умножения”, то есть матрица 10×10, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит произведение $i \cdot j$. Найдите размерность подпространства в $\mathbb{R}^n$, натянутого на столбцы матрицы M. (Эта размерность называется *рангом* матрицы и обозначается $\mathrm{rk}(M)$.)

73. Найдите ранги матриц из задач 3 и 4.

74. Пусть A и B две матрицы одинакового размера. Докажите неравенство на ранги:

$$\mathrm{rk}(A + B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B).$$

75. (а) Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу $m \times m$, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит 1, а все остальные коэффициенты равны 0. Через $I = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{mm}$ обозначим единичную $m \times m$ матрицу. Докажите, что если $m \times n$-матрица A' получается из матрицы A заменой i-той строки на сумму i-той строки и j-той строки, умноженной на a, то $A' = (I + aE_{ij})A$.

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для остальных элементарных преобразований строк.

76. Разложите матрицу A в произведение матриц вида $I + aE_{ij}$ и диагональных матриц. Как это помогает найти обратную матрицу по умножению, то есть такую матрицу A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$?

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

(в) Обоснуйте следующий алгоритм поиска обратной матрицы A^{-1} для матрицы A размера $n \times n$:

(1) Припишем к матрице A справа единичную матрицу I того же порядка. Получим матрицу B размера $n \times 2n$.

(2) Матрицу B приведём элементарными преобразованиями строк к ступенчатой форме B_1.

(3) Если все ведущие единицы матрицы B_1 оказались в левой половине матрицы, то дополнительно приведём матрицу B_1 к *стандартной* ступенчатой форме B_2 (то есть левая половина матрицы B_2 будет равна единичной матрице I). Тогда правая половина матрицы B_2 совпадёт с искомой матрицей A^{-1}.

(4) Если хотя бы одна ведущая единица матрицы B_1 оказалась в правой половине матрицы, то исходная матрица A необратима.

77. При каком условии на коэффициенты 2×2 матрица имеет обратную относительно умножения? Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

7. Модуль 2

Здесь мы изучили векторные пространства над произвольным полем, определители и объёмы, аффинную и евклидову геометрию. Из-за перехода в дистант никаких решений пока набрать не удалось, зато есть 13 коротких (7-20 минут) видео с теорией и примерами [K].

8. Собственные векторы и собственные числа оператора

Если линейный оператор T переводит векторное пространство в то же самое векторное пространство, то определены его композиции с самим собой, такие как $T \cdot T$ или $T \cdot T \cdot T$. По аналогии со степенью числа можно определить n-ую степень T^n оператора T. Для целых положительных n определим

$$T^n = \underbrace{T \cdot \dots \cdot T}_{n}.$$

Также по аналогии со степенью числа определим $T^0 = I$, где I — тождественный оператор на том же пространстве.

78. Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задан матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверьте по индукции, что матрица оператора T^n в том же базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix},$$

где f_n — это n-ое число Фибоначчи. Напомним, что $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, а остальные числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ при } n \geq 2.$$

Как найти явные (не рекуррентные) формулы для коэффициентов матрицы оператора T^n, если дана матрица оператора T? Если матрица диагональная, то всё просто — нужно возводить в степень коэффициенты на диагонали.

79. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}^{2021}.$$

В общем случае можно попытаться найти новый базис, в котором матрица оператора станет диагональной. Для этого нужно найти все *собственные векторы* оператора T. Ненулевой вектор v называется собственным с собственным значением (или числом) λ, если

$$T(v) = \lambda v.$$

80. Найдите все собственные векторы и собственные числа оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. (а) Найдём координаты $v = (x_1, x_2)$ собственного вектора оператора T с собственным значением λ. По определению собственного вектора должно выполняться равенство $T(v) = \lambda v$, что в координатах выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_2 = \lambda x_1$, $x_1 + x_2 = \lambda x_2$. Получили однородную систему из двух уравнений на два неизвестных, которую в матричном виде можно записать так:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевое решение будет, только если ранг системы меньше двух (уравнения пропорциональны друг другу), то есть $-\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$. Получаем квадратное уравнение на λ:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \text{ откуда } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Решая систему при $\lambda = \lambda_1$, находим, что все собственные векторы с собственным значением $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (это золотое сечение) пропорциональны вектору $v_1 = (1, \lambda_1)$. Аналогично, все собственные векторы с собственным значением $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ пропорциональны вектору $v_2 = (1, \lambda_2)$. Других собственных чисел и собственных векторов нет.

Простое, но очень важное наблюдение:

> Если матрица оператора в базисе $v_1, \ldots, v_n$ диагональна, то каждый из векторов $v_1, \ldots, v_n$ — это собственный вектор оператора.

Действительно, если на диагонали матрицы стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, T(v_n) = \lambda_n v_n$ по определению матрицы линейного оператора. Следовательно, вектор v_i — это собственный вектор с собственным значением λ_i. Верно и обратное утверждение:

> Если все векторы некоторого базиса являются собственными векторами оператора, то матрица оператора в этом базисе диагональна.

81. Постройте какой-нибудь базис из собственных векторов оператора T из задачи 80. Найдите матрицу оператора T в построеннном базисе.

Если удалось построить базис из собственных векторов, то несложно найти явную формулу для коэффициентов матрицы оператора T^n и в исходном базисе. Проиллюстрируем это на примере матрицы из задачи 78.

82. Найдите явную формулу, выражающую через n коэффициенты матрицы A^n, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — оператор, заданный в стандартном базисе (e_1, e_2) матрицей A. В задаче 80 мы нашли собственные векторы $v_1 = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ и $v_2 = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ с собственными значениями $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, соответственно. Векторы v_1 и v_2 образуют базис, в котором матрица оператора T диагональна и имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Запишем v_1 и v_2 как векторы-столбцы и составим из них матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку столбцы матрицы P являются собственными векторами матрицы A, выполнено матричное тождество:

$$AP = PB.$$

В самом деле, равенство первых столбцов матриц AP и PB в точности означает, что $Av_1 = \lambda_1 v_1$, а равенство вторых столбцов означает, что $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Отсюда следует, что $A = PBP^{-1}$.

Получаем

$$A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})}_{n} = PB^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Отсюда получаем явную формулу:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_2^n\lambda_1 & \lambda_2^n - \lambda_1^n \\ \lambda_1^{n+1}\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} \end{pmatrix}.$$

В частности, сопоставив эту формулу с результатом задачи 78, мы получим формулу Бине для n-го числа Фибоначчи:

$$f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

83. В задаче 82 мы вывели формулу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_2^n\lambda_1 & \lambda_2^n - \lambda_1^n \\ \lambda_1^{n+1}\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Левая часть формулы — симметрическая матрица, потому что является произведением симметрических матриц. Проверьте непосредственно, что правая часть формулы тоже симметрическая матрица.

84. Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};\quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix};\quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\quad \text{(г)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте векторы $T^n(v)$ для $n = 1,\dots,5$ и $v = (1,0)$, $(1,-1)$.

85. (а) Найдите все вещественные собственные числа и собственные векторы операторов из задачи 84.

(б) Определите, какие из операторов в пункте (а) *диагонализуемы*, то есть в некотором базисе записываются диагональной матрицей. Для диагонализуемых операторов найдите базис, в котором их матрица диагональна.

86. Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы A^n для всех матриц A из задачи 84.

87 (∗). Рациональный кузнечик прыгает по рациональным точкам прямой. Перед очередным прыжком кузнечик выбирает натуральное число n. Далее, если находится он в точке $\frac{p}{q}$, то прыгает в точку $\frac{p+nq}{q+np}$. Изначально кузнечик находится в точке 2020. Может ли он попасть в точку 3?

Указание. Вместо кузнечика можно рассмотреть набор операторов $T_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, занумерованных натуральными числами n и заданных в стандартном базисе матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Вместо точки $\frac{p}{q}$ рассмотрим вектор (p, q). Тогда прыжок кузнечика — это результат применения оператора T_n к вектору (p, q):

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+nq \\ q+np \end{pmatrix}.$$

9. Многочлены от оператора

Если $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен, а $T : V \to V$ — оператор на векторном пространстве V, то можно определить оператор $f(T) : V \to V$ на том же пространстве:

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_0 I.$$

Может показаться странным, что при подстановке оператора в многочлен мы вместо a_0 пишем $a_0 I$, но просто a_0 оставить никак нельзя — мы не умеем складывать друг с другом оператор и число. Учитывая наше соглашение $T^0 = I$, мы можем переписать

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_0 T^0.$$

В таком виде определение выглядит более естественным.

88. Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(г)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для многочлена $f(t) = t^2 - t - 1$ найдите оператор $f(T)$.

Решение. (а) Матрица оператора $f(T) = T^2 - T - I$ в стандартном базисе равна $A^2 - A - I$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Другое решение. (а) В базисе из собственных векторов оператора T (который Вы, возможно, нашли в задаче 80) матрица оператора диагональна и имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица оператора $f(T) = T^2 - T - I$ в том же базисе имеет вид:

$$f(B) = \begin{pmatrix} f(2) & 0 \\ 0 & f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 - 2 - 1 & 0 \\ 0 & 1^2 - 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это неполный ответ, поскольку мы не предъявили явно базис из собственных векторов. Однако из матрицы $f(B)$ несложно получить матрицу $f(A)$, то есть матрицу оператора $f(T)$ в стандартном базисе. Поскольку $A = PBP^{-1}$, где P — матрица, составленная из собственных векторов-столбцов, получаем

$$f(A) = f(PBP^{-1}) = (PBP^{-1})^2 - PBP^{-1} - I =$$
$$= PB^2P^{-1} + PBP^{-1} - PIP^{-1} = P(B^2 + B - I)P^{-1} = Pf(B)P^{-1}.$$

Вместо явного вычисления матрицы P, можно использовать такой трюк. Заметим, что $f(B) = 2B - 3I$. Тогда

$$f(A) = Pf(B)P^{-1} = P(2B - 3I)P^{-1} = 2PBP^{-1} - 3I = 2A - 3I =$$
$$= 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 3 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в отличие от первого решения, нам не пришлось возводить матрицу A в квадрат.

Зачем подставлять в многочлены оператор? Оказывается, это даёт ещё один способ (возможно, самый быстрый) вычислять степени оператора. Способ основан на делении многочленов с остатком.

89. Найдите остаток при делении многочлена t^{2020} на многочлен $t^2 - 3t + 2$.

Решение. Конечно, можно поделить уголком, но это займёт много времени. Лучше воспользуемся тем, что и многочлен t^{2020}, и его остаток должны принимать одинаковые значения в корнях многочлена $t^2 - 3t + 2$. Действительно, запишем результат деления с остатком:

$$t^{2020} = (t^2 - 3t + 2)q(t) + r(t)$$

и подставим в обе части сначала 1, а потом 2 (это корни многочлена $t^2 - 3t + 2$). Получим два уравнения: $1^{2020} = r(1)$ и $2^{2020} = r(2)$. Поскольку степень остатка $r(t)$ строго меньше двух, мы можем однозначно восстановить многочлен $r(t)$ по его значениям в двух точках. В самом деле, запишем $r(t) = at + b$, где a и b — пока неизвестные нам коэффициенты. Тогда $1 = a + b$ и $2^{2020} = 2a + b$ — два линейных уравнения на два неизвестных. Решая их, находим $a = 2^{2020} - 1$, $b = 2 - 2^{2020}$. Поэтому остаток равен $(2^{2020} - 1)t + (2 - 2^{2020})$.

Другое решение. Это решение отличается от предыдущего методом нахождения линейной функции $r(t)$, которая в точках 1 и 2 принимает те же значения, что и функция t^{2020}. Вместо решения системы линейных уравнений найдём $r(t)$ по интерполяционной формуле Лагранжа:

$$r(t) = 1^{2020}\left(\frac{t-2}{1-2}\right) + 2^{2020}\left(\frac{t-1}{2-1}\right) = -(t-2) + 2^{2020}(t-1) = (2^{2020} - 1)t + (2 - 2^{2020}).$$

Скажем, что многочлен f *аннулирует* оператор T, если $f(T)$ — нулевой оператор. В частности, если A — матрица оператора T в каком-нибудь базисе, то $f(A)$ — нулевая матрица. Матрицы оператора в разных базисах получаются друг из друга сопряжением с помощью обратимой матрицы, поэтому:

> Если многочлен f аннулирует матрицу A, то f аннулирует и матрицу PAP^{-1} для всех обратимых матриц P.

90. Многочлен t^2-3t+2 имеет ровно два вещественных корня: 1 и 2. Однако можно предъявить бесконечное семейство таких 2×2 матриц, что $A^2-3A+2I=0$. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a — вещественный параметр. Почему доказательство утверждения

> "Количество вещественных корней многочлена не превышает его степени."

перестаёт работать при переходе от вещественных чисел к матрицам?

91. Для матрицы A найдите многочлен степени не выше 2, который её аннулирует:

$$\text{(а)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(г)}\ A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(д)}\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(е)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

92. Не вычисляя собственные векторы, вычислите коэффициенты матрицы A^n, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Собственные числа матрицы A равны 1 и 2, поэтому многочлен $(t-1)(t-2) = t^2-3t+2$ аннулирует матрицу A. В самом деле,

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В задаче 89 мы поделили с остатком многочлен t^n на $(t-1)(t-2)$ и получили такое равенство многочленов:

$$t^n = (t-1)(t-2)q(t) + at + b,$$

где $a = 2^n - 1$, $b = 2 - 2^n$. Поскольку многочлены в левой и правой части равны (то есть равны их коэффициенты при соответственных степенях переменной t), то равны и многочлены от матрицы:

$$A^n = (A-I)(A-2I)q(A) + aA + bI.$$

Теперь вычисляем правую часть:

$$(A-I)(A-2I)q(A) + aA + bI =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} q(A) + a\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n - 2 & 3\cdot 2^n - 3 \\ -2^{n+1}+2 & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

93. Вычислите коэффициенты матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$$

с точностью до второго знака после запятой включительно.

94. Найдите все такие 2×2 матрицы X, что

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

95 (∗). Пусть $f(t)$ — многочлен, а A — 2×2 матрица с собственными значениями λ_1 и λ_2.

(а) Докажите, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$f(A) = f(\lambda_1)\frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(б) Придумайте аналогичную формулу для случая $\lambda_1 = \lambda_2$.

10. Минимальный многочлен оператора

У каждого оператора на конечномерном векторном пространстве есть ненулевой аннулирующий многочлен. Действительно, если A — матрица оператора в каком-нибудь базисе, а n — размерность пространства, то матрицы I, A, A^2,…, A^d заведомо линейно зависимы, если $d \geq n^2$ (как мы помним, размерность пространства $n \times n$ матриц равна n^2). Условие линейной зависимости

$$a_d A^d + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I = 0$$

в точности совпадает с условием, что многочлен $f(t) = a_d t^d + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ аннулирует матрицу A.

Для вычисления степени оператора мы использовали остатки при делении на аннулирующий многочлен. Чем меньше степень аннулирующего многочлена, тем проще находить остатки. Как найти *минимальный многочлен* оператора, то есть ненулевой аннулирующий многочлен минимальной возможной степени? Потребуем для определённости, чтобы коэффициент при старшей степени минимального многочлена был равен единице.

96. Может ли оператор иметь два разных минимальных многочлена?

Решение. Нет, не может. Пусть $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ и $g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_0$ — два минимальных многочлена оператора T. Тогда $m \geq n$ поскольку $f(t)$ имеет минимальную степень среди всех ненулевых аннулирующих многочленов. Аналогично убеждаемся, что $n \geq m$, откуда $m = n$. Поэтому разность $f(t) - g(t) = (a_{n-1} - b_{n-1})t^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0)$ — это многочлен степени строго меньше, чем n. При этом $f - g$ тоже аннулирует оператор T:

$$f(T) - g(T) = 0 - 0 = 0.$$

Следовательно, $f - g$ — это нулевой многочлен, иначе мы получили бы, что $f - g$ — ненулевой аннулирующий многочлен степени строго меньше, чем n. Отсюда $a_{n-1} = b_{n-1}$,…, $a_0 = b_0$.

97. Докажите, что многочлен f аннулирует оператор T тогда и только тогда, когда f делится на минимальный многочлен оператора T.

98. Проверьте, что каждая 2×2 матрица A удовлетворяет квадратному уравнению:

$$A^2 + pA + qI = 0,$$

где $p = -\mathrm{tr}(A)$, $q = \det(A)$.

99. Проверьте, что если λ_1 и λ_2 — собственные числа 2×2 матрицы A, то $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A)$, $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$.

100. Оператор T на векторном пространстве удовлетворяет уравнению

$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$

Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

Решение. Рассмотрим собственный вектор v оператора T с каким-нибудь собственным значением λ. Тогда по определению $T(v) = \lambda v$. Следовательно,

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v.$$

Отсюда получаем:

$$(T^2 - 5T + 6I)(v) = T^2(v) - 5T(v) + 6v = \lambda^2 v - 5\lambda v + 6v = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)v.$$

Поскольку по условию $T^2 - 5T + 6I$ — нулевой оператор, вектор $(T^2 - 5T + 6T)(v)$ тоже нулевой. С другой стороны, мы показали, что $(T^2 - 5T + 6T)(v) = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)v$. Следовательно, $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, откуда возможные значения для λ — это 2 или 3.

Осталось проверить, что существуют операторы с собственными значениями 2 и 3, удовлетворяющие условию задачи. Например, можно взять оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который в некотором базисе записывается матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица оператора $T^2 - 5T + I$ в том же базисе имеет вид:

$$A^2 - 5A + 6A = (A - 2I)(A - 3I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соображение, использованное в решении задачи 100, можно обобщить:

> Если v — собственный вектор оператора T с собственным значением λ, а $f(t)$ — многочлен, то
> $$f(T)v = f(\lambda)v.$$

В частности, если многочлен f аннулирует оператор T, то $f(\lambda) = 0$ для всех собственных значений λ оператора T. Отсюда получаем довольно сильное условие на аннулирующие многочлены оператора:

> Каждое собственное значение оператора является корнем каждого аннулирующего многочлена этого оператора.

101. Матрица оператора T в некотором базисе диагональна, причём на диагонали стоят числа

$$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{m_k},$$

и λ_1, λ_2,..., λ_k попарно различны. Найдите минимальный многочлен оператора T.

Решение. Проверим, что многочлен $(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k)$ аннулирует оператор T, то есть

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_k I) = 0.$$

Матрица оператора $T - \lambda_1 I$ (в том же базисе) тоже диагональна, и на диагонали стоят числа

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda_2 - \lambda_1}_{m_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_k - \lambda_1, \ldots, \lambda_k - \lambda_1}_{m_k}.$$

В частности, первые m_1 столбцов этой матрицы нулевые, то есть оператор $T - \lambda_1 I$ переводит первые m_1 базисных векторов в нулевой вектор. Вычисляя матрицы операторов $T - \lambda_2 I$,..., $T - \lambda_k I$, убеждаемся, что для каждого базисного вектора e_j

найдётся такое λ_i, что $(T-\lambda_i I)e_j = 0$. Иными словами, j-тый столбец матрицы оператора $(T-\lambda_i I)$ равен нулю. Следовательно, композиция $(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\cdots(T-\lambda_k I)$ переводит в нуль все базисные векторы, то есть является нулевым оператором.

Осталось проверить, что никакой ненулевой многочлен степени строго меньше, чем k, не аннулирует T. Поскольку количество корней многочлена не превышает его степени, многочлен $g(t)$ степени меньше, чем k, не может иметь k попарно различных корней. Поэтому найдётся такое число λ_i, что $g(\lambda_i) \neq 0$. Возьмём собственный вектор v оператора T с собственным значением λ_i (например, можно взять подходящий базисный вектор). Тогда $g(T)v = g(\lambda)v \neq 0$, поэтому $g(T) \neq 0$, то есть многочлен g не аннулирует оператор T. Таким образом, минимальный многочлен оператора T имеет степень k, и равен $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_k)$.

102. Может ли минимальный многочлен диагонализуемого оператора иметь кратные корни?

103. Найдите минимальный многочлен оператора T, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. (в) Возьмём какой-нибудь ненулевой вектор $v_1 \in \mathbb{R}^4$ и будем вычислять $T(v_1)$, $T^2(v_1)$,… до тех пор, пока полученные векторы не станут линейно зависимы. Например,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad T^2(v_1) = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Получаем линейную зависимость:

$$T^2(v_1) - 3T(v_1) + 2v_1 = 0.$$

Поэтому оператор $T^2 - 3T + I$ переводит векторы v_1 и $T(v_1)$ в нулевой вектор. Действительно,

$$(T^2 - 3T + I)(v_1) = T^2(v_1) - 3T(v_1) + v_1 = 0;$$
$$(T^2 - 3T + I)T(v_1) = T(T^2 - 3T + I)(v_1) = T(0) = 0.$$

Таким образом, мы нашли такой ненулевой многочлен $f_1(t) = t^2 - 3t + 2$, что оператор $f_1(T)$ аннулирует векторы v_1 и $T(v_1)$. При этом степень f_1 минимально возможная — это следут из линейной независимости векторов v_1 и $T(v_1)$. Результат наших вычислений можно сформулировать так:

> Минимальный многочлен оператора T, ограниченного на подпространство $V_1 = \langle v_1, T(v_1), T^2(v_1), \ldots \rangle$, совпадает с многочленом f_1.

Теперь возьмём какой-нибудь вектор v_2, линейно независимый с векторами v_1 и $T(v_1)$ (то есть v_2 не лежит в подпространстве V_1). Повторим вышеописанную процедуру с v_2. Например,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad T^2(v_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Получаем линейную зависимость

$$T^2(v_2) - 3T(v_2) + 2v_2 = 0,$$

откуда находим многочлен $f_2(t) = t^2 - 3t + 2$ (он по чистой случайности совпал с f_1). Это минимальный многочлен оператора T, ограниченного на подпространство $V_2 = \langle v_2, T(v_2), T^2(v_2), \ldots\rangle$.

Если бы векторы v_1, $T(v_1)$, v_2, $T(v_2)$ были линейно независимы, то на этом можно было бы остановиться. Но есть линейная зависимость $v_1 - T(v_1) + v_2 - T(v_2) = 0$. Поэтому V_1 и V_2 не порождают $\mathbb{R}^4$, а порождают трёхмерное подпространство в $\mathbb{R}^4$. Следовательно, найдётся третий вектор v_3, линейно независимый с v_1, $T(v_1)$, v_2 (то есть v_3 не лежит в сумме подпространств $V_1 + V_2$). Применим к v_3 ту же процедуру, что к v_1 и v_2. Например,

$$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad T(v_3) = \begin{pmatrix}4\\2\\6\\2\end{pmatrix}; \quad T^2(v_3) = \begin{pmatrix}12\\6\\16\\6\end{pmatrix}.$$

Получаем линейную зависимость

$$T^2(v_3) - 3T(v_3) + 2v_3 = 0,$$

откуда находим многочлен $f_3(t) = t^2 - 3t + 2$. Это минимальный многочлен оператора T, ограниченного на подпространство $V_3 = \langle v_3, T(v_3), T^2(v_3), \ldots\rangle$.

Минимальный многочлен f оператора T — это наименьшее общее кратное многочленов f_1, f_2 и f_3. Действительно, f является аннулирующим многочленом оператора T, ограниченного на подпространство V_i, поэтому f делится на f_i. Следовательно, f делится и на $\text{НОК}(f_1, f_2, f_3)$. С другой стороны, $\text{НОК}(f_1, f_2, f_3)$ аннулирует оператор T. В самом деле, оператор $\text{НОК}(f_1, f_2, f_3)[T]$ переводит каждое из подпространств V_i в нуль, потому что многочлен $\text{НОК}(f_1, f_2, f_3)$ делится на f_i, то есть на минимальный многочлен оператора T, ограниченного на V_i. Поскольку $V = V_1 + V_2 + V_3$, получаем, что $\text{НОК}(f_1, f_2, f_3)[T]$ — нулевой оператор, так как переводит в нуль всё пространство V. В нашем случае $f_1 = f_2 = f_3 = t^2 - 3t + 2$, поэтому $\text{НОК}(f_1, f_2, f_3) = t^2 - 3t + 2$.

11. Рекуррентные последовательности

Мы научились находить явные формулы для степеней оператора двумя способами: с помощью собственных векторов и с помощью минимального многочлена оператора. В качестве приложения найдём явные формулы для рекуррентных последовательностей, подобные формуле Бине для чисел Фибоначчи. Заодно разберёмся в особых случаях: что делать, когда собственные векторы не образуют базис, и минимальный многочлен имеет кратные корни.

104. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 3.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

Решение. Рассмотрим все последовательности, удовлетворяющие соотношению

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n.$$

Каждая такая последовательность однозначно определяется начальными условиями (a_0, a_1). Поэтому мы можем отождествить последовательности с векторами (a_0, a_1) в $\mathbb{R}^2$. Для каждой последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ можно определить её *сдвиг*

$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Легко проверить (проверьте!), что отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, которое сопоставляет последовательности её сдвиг, является линейным оператором на $\mathbb{R}^2$. Матрица оператора T в стандартном базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ поскольку } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 4a_0 + 3a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Поэтому для каждой последовательности выполняется матричное тождество:

$$A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Действительно, если мы n раз применяем к последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ оператор сдвига, то получаем последовательность $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$.

Найдём собственные векторы оператора T. Заметим, что собственный вектор оператора T с собственным значением λ — это такая рекуррентная последовательность, которая вдобавок является геометрической прогрессией со знаменателем λ. Действительно, условие $T(v) = \lambda v$ для последовательности $v = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ означает, что $a_1 = \lambda a_0$, $a_2 = \lambda a_1, \ldots$ Таким образом, $v = (a_0, a_0\lambda, a_0\lambda^2, \ldots)$. Такая геометрическая прогрессия удовлетворяет рекуррентному соотношению, если

$$a_0\lambda^{n+2} = 3a_0\lambda^{n+1} + 4a_0\lambda^n,$$

откуда получаем, что λ — корень *характеристического многочлена* $t^2 - 3t - 4$. Поэтому собственные значения оператора T равны 4 и -1.

В качестве собственных векторов возьмём геометрические прогрессии $a_n = 4^n$ и $a_n = (-1)^n$. Им соответствуют линейно независимые векторы $(1, 4)$ и $(1, -1)$ в $\mathbb{R}^2$, поэтому собственные векторы образуют базис в пространстве всех рекуррентных последовательностей. Таким образом, рекуррентная последовательность, удовлетворяющая условию задачи, представляется в виде линейной комбинации

$$a_n = 4^n\alpha + (-1)^n\beta,$$

где α и β — вещественные параметры. В нашем случае из условий $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ выводим два линейных уравнения на α и β:

$$\alpha + \beta = 1; \quad 4\alpha - \beta = 3,$$

откуда $\alpha = \frac{4}{5}$, $\beta = \frac{1}{5}$. Отсюда получаем явную формулу:

$$a_n = \frac{4^{n+1} + (-1)^n}{5}$$

Другое решение. Это решение отличается от первого тем, что вместо поиска собственных векторов мы ищем минимальный многочлен того же самого оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Возьмём последовательность $v = (1, 0, \ldots)$ и будем искать линейную зависимость между векторами v, $T(v) = (0, 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1, \ldots) = (0, 4, \ldots)$ и $T(v^2) = (4, 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0, \ldots) = (4, 12, \ldots)$. Получаем соотношение

$$T^2(v) - 3T(v) - 4v = 0.$$

Поэтому минимальный многочлен оператора T равен $t^2 - 3t - 4 = (t - 4)(t + 1)$. Действуя, как в задаче 89, поделим с остатком многочлен t^n на $(t-4)(t+1)$, получим:

$$t^n = (t - 4)(t + 1)q(t) + at + b,$$

где $a = \frac{4^n - (-1)^n}{5}$, $b = \frac{4(-1)^n + 4^n}{5}$. Подставляя оператор T в это тождество, получаем

$$T^n = aT + bI.$$

В матричном виде:

$$A^n = a\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4(-1)^n + 4^n & 4^n - (-1)^n\\ 4(4^n - (-1)^n) & 4^{n+1} + (-1)^n\end{pmatrix}.$$

Поэтому для последовательности с начальными условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4(-1)^n + 4^n & 4^n - (-1)^n\\ 4(4^n - (-1)^n) & 4^{n+1} + (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4^{n+1} + (-1)^n\\ 4^{n+2} + (-1)^{n+1}\end{pmatrix}.$$

Третье решение. Это решение похоже на предыдущее с той разницей, что остаток при делении многочлена t^n на $(t-4)(t+1)$ мы найдём другим способом (этот же способ используется во втором решении задачи 89). Найдём такие α и β, что

$$t^n = (t-4)(t+1)q(t) + \alpha(t-4) + \beta(t+1).$$

Как и раньше, подставим в обе части $t = 4$ и $t = 1$. Получим, соответственно,

$$4^n = \beta(4+1); \quad (-1)^n = \alpha(-1-4).$$

Заметим, что в этом случае нам даже не придётся решать систему из двух линейных уравнений, мы сразу находим, что $\alpha = \frac{-(-1)^n}{5}$, $\beta = \frac{4^n}{5}$. Отсюда

$$T^n = \alpha(T - 4I) + \beta(T + I).$$

В матричном виде:

$$A^n = \alpha\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4(-1)^n + 4^n & 4^n - (-1)^n\\ 4(4^n - (-1)^n) & 4^{n+1} + (-1)^n\end{pmatrix}.$$

Заметим, что вычисление матрицы A^n получилось короче, чем в предыдущем решении за счёт того, что α и β задаются более простой формулой, чем a и b. Это может помочь в более громоздких случаях, когда собственные числа окажутся иррациональными или невещественнными (см. например задачу 108).

105. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

106. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

107. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n); \quad a_0 = 2,\ a_1 = 2.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

Решение. Действуя, как в первом решении задачи 104 находим геометрическую прогрессию $v_1 = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ со знаменателем λ, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$\lambda^{n+2} = 4\lambda^{n+1} - 4\lambda^n.$$

Отсюда находим характеристическое уравнение на знаменатель λ:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Поскольку $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$ это уравнение имеет только один корень 2 (кратности два). Поэтому есть только одна с точностью до пропорциональности геометрическая прогрессия, удовлетворяющая рекуррентному соотношению. Иными словами, у оператора $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$$

есть только один собственный вектор с точностью до пропорциональности. То есть собственные векторы оператора T не образуют базиса.

Однако можно угадать ещё одну "удобную" последовательность, удовлетворяющую рекуррентому соотношению

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n.$$

Это последовательность, заданная формулой $a_n=n2^n$. Обозначим её через v_2. Последовательности v_1 и v_2 образуют базис в пространстве всех последовательностей, удовлетворяющих данному рекуррентному соотношению, поскольку векторы $(1,2)$ и $(0,2)$ линейно независимы в $\mathbb{R}^2$. Поэтому последовательность, удовлетворяющая условиям задачи, представляется в виде линейной комбинации

$$a_n=2^n\alpha+n2^n\beta.$$

Из условий $a_0=2$, $a_1=2$ находим $\alpha=2$, $\beta=-1$, откуда

$$a_n=2^n(2-n).$$

Другое решение. Действуя, как во втором решении задачи 104, мы ищем минимальный многочлен оператора $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Возьмём последовательность $v=(1,0,\ldots)$ и будем искать линейную зависимость между векторами v, $T(v)=(0,-4,\ldots)=(0,4,\ldots)$ и $T(v^2)=(-4,16)$. Получаем соотношение

$$T^2(v)-4T(v)+4v=0.$$

Поэтому минимальный многочлен оператора T равен $t^2-4t+4=(t-2)^2$. Поделим с остатком многочлен t^n на $(t-2)^2$, получим:

$$t^n=(t-2)^2q(t)+at+b.$$

Подставив $t=2$ в обе части тождества, получим $2a+b=2^n$. Откуда взять второе уравнение на a и b? Тут можно воспользоваться тем, что если у многочлена есть корень кратности два, то этот же корень есть и у его производной. В самом деле, продифференцируем обе части тождества по t:

$$nt^{n-1}=2(t-2)q(t)+(t-2)^2q'(t)+a.$$

Снова подставим $t=2$, получим $a=n2^{n-1}$. Отсюда $b=(1-n)2^n$. Тот же ответ можно было получить сразу из интерполяционной формулы Лагранжа с кратными узлами, которая в данном случае совпадает с формулой Тейлора.

Подставляя оператор T в тождество $t^n=(t-2)^2q(t)+at+b$, получаем

$$T^n=aT+bI.$$

В матричном виде:

$$A^n=a\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}2(1-n) & n\\ -4n & 2(n+1)\end{pmatrix}.$$

Поэтому для последовательности с начальными условиями $a_0=2$, $a_1=2$:

$$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}2(1-n) & n\\ -4n & 2(n+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}4-2n\\ 4-4n\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}2-n\\ 2-2n\end{pmatrix}.$$

108. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n); \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

Указание. Не пугайтесь, что собственные числа оказались комплексно сопряжёнными (невещественными) числами. Методы задачи 104 прекрасно работают и в этом случае. Например, формула для чисел Фибоначчи содержит в качестве ингредиентов иррациональные числа, но конечный результат — целое число.

12. Характеристический многочлен оператора

С каждым оператором T на конечномерном векторном пространстве можно связать два многочлена — минимальный μ_T (с ним мы уже познакомились) и характеристический χ_T. Для минимального многочлена нет простой явной формулы, зато его можно найти с помощью алгоритма из задачи 103 (этот алгоритм ещё называют методом Крылова в честь замечательного инженера-кораблестроителя и математика А.Н. Крылова [Кр]). Характеристический многочлен определяется короткой явной формулой:

$$\chi_T(t) = \det(T - tI).$$

Чтобы найти характеристический многочлен с помощью этой формулы, нужно вычислить определитель матрицы, коэффициенты которой — это многочлены от t. Формула выглядит изящно и важна для теории, но в практических (особенно компьютерных) вычислениях гораздо эффективнее метод Крылова.

109. Найдите характеристический многочлен оператора T, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. (в) Определитель оператора совпадает с определителем его матрицы (в произвольном базисе). Поэтому нужно вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} -1-t & 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2-t & 2 & -3 \\ -4 & 4 & 6-t & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -1-t \end{pmatrix}.$$

Проведём элементарные преобразования строк: вычтем из третьей строку вторую, умноженную на 4, из четвёртой — вторую, умноженную на 2, а из первой — вторую, умноженную на $1+t$. Получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 2-(1+t)(2-t) & 4-2(1+t) & -6+3(1+t) \\ -1 & 2-t & 2 & -3 \\ 0 & -4+4t & -2-t & 6 \\ 0 & -2+2t & -2 & 5-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t(t-1) & 2(1-t) & 3(t-1) \\ -1 & 2-t & 2 & -3 \\ 0 & 4(t-1) & -2-t & 6 \\ 0 & 2(t-1) & -2 & 5-t \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель полученной матрицы по первому столбцу, получим

$$\chi_T(t) = \det\begin{pmatrix} t(t-1) & 2(1-t) & 3(t-1) \\ 4(t-1) & -2-t & 6 \\ 2(t-1) & -2 & 5-t \end{pmatrix} = (t-1)\det\begin{pmatrix} t & 2(1-t) & 3(t-1) \\ 4 & -2-t & 6 \\ 2 & -2 & 5-t \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель последней матрицы по первому столбцу, получим

$$t\det\begin{pmatrix}-2-t & 6\\ -2 & 5-t\end{pmatrix} - 4(t-1)\det\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -2 & 5-t\end{pmatrix} + 2(t-1)\det\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -2-t & 6\end{pmatrix} =$$

$$t(t^2-3t+2) - 8(t-1)(t-2) + 6(t-1)(t-2) = (t-1)(t-2)^2.$$

Следовательно, $\chi_T(t) = (t-1)^2(t-2)^2$. Заметим, что нам попутно удалось вычислить разложение характеристического многочлена на линейные множители, то есть найти корни характеристического многочлена.

> Корни характеристического многочлена оператора — это в точности собственные числа оператора.

Действительно, условие $T(v) = \lambda v$ (вектор v — собственный с собственным значением λ), если его записать в координатах, задаёт однородную систему из n линейных уравнений на n неизвестных:

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix},$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора v в каком-нибудь базисе, а A — матрица оператора T в этом же базисе. Если перенести всё в левую часть, получится система

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

По ходу дела мы воспользовались дистрибутивностью умножения матриц (определите, где именно).

Система имеет нетривиальное (отличное от нулевого) решение тогда и только тогда, когда матрица $A - \lambda I$ вырождена, то есть $\det(A-\lambda I) = 0$. Поскольку определитель оператора совпадает с определителем его матрицы, условие $\det(A - \lambda T) = 0$ эквивалентно условию $\chi_T(\lambda) = 0$.

Тут придирчивый студент может поинтересоваться, почему определение характеристического многочлена оператора зависит только от самого оператора T, а не от выбора его матрицы A в конкретном базисе. С одной стороны, у определителя оператора T есть геометрический смысл — это коэффициент, на который умножаются объёмы n-мерных параллелепипедов при действии оператора (поэтому число $\det T$ не зависит от выбора базиса). С другой стороны, определитель оператора $T - \lambda I$ (если λ воспринимать как формальную переменную), уже не имеет такого наглядного смысла ($\det(T - \lambda I)$ — это уже не число, а многочлен). Мы ещё вернёмся к этому вопросу.

110. Докажите, что характеристический многочлен оператора на двумерном пространстве равен

$$t^2 - \operatorname{tr}(T)t + \det(T).$$

111. Чему может быть равен минимальный многочлен оператора, если его характеристический многочлен равен $(t-\lambda)^2$?

112. (а) Верно ли, что если оператор T на конечномерном векторном пространстве имеет два линейно независимых собственных вектора с собственным значением λ, то λ — кратный корень характеристического многочлена оператора T?

(б) Верно ли обратное?

113. (а) Докажите, что собственные значения вещественной симметрической матрицы размера 2×2 вещественны.

(б) Докажите, что вещественная матрица нечетного размера имеет вещественное собственное значение, а четного — не обязательно.

114. Может ли вещественная 3×3 матрица A удовлетворять уравнению:

$$(A^2 + I)^{2020} = 0?$$

115. Существует ли вещественная 3×3 матрица A, удовлетворяющая уравнению

$$A^2 + A + 7I = 0?$$

Через I обозначена единичная 3×3 матрица.

116. Может ли вещественная 3×3 матрица A удовлетворять тождеству:

(а) $A^2 = 0$; (б) $A^2 - I = 0$; (в) $A^2 + I = 0$?

Указание к (в): покажите, что у A есть вещественное собственное значение.

117. Найдите формулу, выражающую коэффициенты характеристического многочлена $n \times n$-матрицы через коэффициенты самой матрицы для

(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) произвольного n.

118. Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ найдите собственные числа и собственные векторы оператора на $\mathbb{C}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

13. Теорема Гамильтона–Кэли

Теорема Гамильтона–Кэли утверждает, что

$$\chi_A(A) = 0$$

для каждой квадратной матрицы A. В этом разделе приводится одно из доказательств теоремы Гамильтона–Кэли.

119. Проверьте, что теорема Гамильтона–Кэли эквивалентна следующему утверждению. Минимальный многочлен матрицы делит её характеристический многочлен.

120. Проверьте прямым вычислением, что теорема Гамильтона–Кэли выполняется для

(а) диагональных матриц;

(б) матриц размера 2×2.

121. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V, а $v_1, \ldots, v_n$ — его собственные векторы с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, соответственно. Проверьте, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ попарно различны, то $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы.

Решение. Пусть какая-нибудь линейная комбинация $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ равна нулевому вектору. Проверим, что тогда $a_i = 0$ для каждого i от 1 до n. Для этого применим к обеим частям тождества

$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$$

композицию операторов $T-\lambda_1 I,\ldots,\ T-\lambda_{i-1}I,\ T-\lambda_{i+1}I,\ldots,\ T-\lambda_n I$. Получим

$$(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)a_i v_i=0,$$

поскольку $(T-\lambda_k I)v_j=(\lambda_j-\lambda_k)v_j$. Отсюда следует, что $a_i=0$.

122 (Теорема Гамильтона–Кэли для диагонализуемой матрицы)**.** Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — корни характеристического многочлена $n\times n$ матрицы A. Докажите, что если $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ попарно различны, то выполнено тождество

$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\ldots(A-\lambda_n I)=0.$$

Решение. Будем думать про матрицу A как про матрицу линейного оператора на координатном векторном пространстве векторов-столбцов:

$$T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n;\quad T:X\mapsto AX.$$

Тогда по предыдущей задаче у оператора T есть базис из собственных векторов $(v_1,\ldots,v_n)$. Обозначим через P матрицу, составленную из столбцов $v_1,\ldots,v_n$ (то есть матрицу перехода от стандартного базиса в $\mathbb{F}^n$ к базису из собственных векторов). Получаем тождество $PA=DP$, откуда

$$A=P^{-1}DP.$$

Следовательно,

$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\ldots(A-\lambda_n I)=(P^{-1}DP-\lambda_1 I)(P^{-1}DP-\lambda_2 I)\ldots(P^{-1}DP-\lambda_n I)=$$

$$=(P^{-1}DP-P^{-1}\lambda_1 IP)(P^{-1}DP-P^{-1}\lambda_2 IP)\ldots(P^{-1}DP-P^{-1}\lambda_n IP)=$$

$$=P(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)\ldots(D-\lambda_n I)P^{-1}=P\chi_D(D)P^{-1}=0.$$

Все равенства в этой цепочке, кроме последнего, следуют из свойств матричного умножения (ассоциативности и дистрибутивности умножения произвольных матриц и коммутативности умножения на скалярные матрицы λI). Последнее равенство следует из теоремы Гамильтона-Кэли для диагональной матрицы (задача 120(a)).

Над комплексными числами множество диагонализуемых матриц всюду плотно в пространстве всех матриц (это следует из основной теоремы алгебры и свойств дискриминанта многочлена). Поэтому в задаче 122 мы фактически доказали теорему Гамильтона–Кэли в случае общего положения. Отсюда уже легко вывести теорему Гамильтона–Кэли и для остальных (недиагонализуемых) матриц. А именно, мы доказали, что матрица $\chi_A(A)$ нулевая для всех диагонализуемых A. С другой стороны, коэффициенты матрицы $\chi_A(A)$ непрерывно зависят от A (так как являются многочленами от коэффициентов матрицы A). Из анализа и топологии мы знаем, что если непрерывная функция на топологическом пространстве равна нулю на всюду плотном подмножестве этого пространства, то она тождественный нуль. Поэтому $\chi_A(A)=0$ для всех матриц A. Конечно, это не чисто алгебраическое рассуждение, зато простое и убедительное.

Более алгебраическое доказательство можно получить, решив следующие две задачи.

123. Докажите, что для любого оператора на конечномерном комплексном векторном пространстве найдётся базис, в котором матрица этого оператора верхнетреугольна.

124 (Теорема Гамильтона–Кэли для верхнетрегольных матриц)**.** Проверьте, что для любой верхнетреугольной $n \times n$ матрицы A с (возможно совпадающими) числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали выполнено тождество:

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \ldots (A - \lambda_n I) = 0.$$

Чтобы вывести теорему Гамильтона–Кэли над произвольным полем $\mathbb{F}$ из случая $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, можно использовать “принцип тождественности тождеств” (больше об этом замечательном принципе можно прочесть в [Ar, 12.3]). А именно, будем воспринимать коэффициенты матрицы A как формальные переменные a_{ij}. Тогда легко проверить, что коэффициенты матрицы $\chi_A(A)$ — это многочлены с целыми коэффициентами от переменных a_{ij} (чтобы убедиться в этом факте, вовсе не нужно явно вычислять коэффициенты многочленов). Причём эти многочлены обращаются в нуль при подстановке вместо каждого a_{ij} произвольного комплексного числа. Легко проверить, что многочлен $f(x_1, \ldots, x_d)$ от d формальных переменных, который обращается в нуль при подстановке $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ для любого набора $(c_1, \ldots, c_d)$ комплексных чисел, является тождественным нулём (то есть все его коэффициенты равны нулю). Тем самым, коэффициенты матрицы $\chi_A(A)$ — это нулевые многочлены от формальных переменных a_{ij}. Следовательно, если вместо a_{ij} мы подставим элементы произвольного поля $\mathbb{F}$ (или даже элементы произвольного коммутативного кольца), то получим нуль.

14. Жорданова нормальная форма

Если у оператора T нет базиса из собственных векторов, то никакая его матрица не будет диагональной. Однако можно построить базис $(v_1, \ldots, v_n)$ (*жорданов базис*), в котором матрица оператора выглядит достаточно просто, в частности, всё её ненулевые коэффициенты расположены либо на главной диагонали, либо непосредственно над главной диагональю. Более точно, базис $(v_1, \ldots, v_n)$ жорданов, если его можно разбить на наборы (*жордановы цепочки*)

$$(v_1, \ldots, v_{i_1}), \quad (v_{i_1+1}, \ldots, v_{i_2}), \quad \ldots, \quad (v_{i_{\ell-1}+1}, \ldots, v_n)$$

для некоторых $i_0 = 0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{\ell-1} < i_\ell = n$ так, чтобы для каждого j от нуля до $\ell - 1$ оператор T действовал на векторы из набора $(v_{i_j+1}, \ldots, v_{j+1})$ по формулам:

$$(T - \lambda_j I)v_{i_j} = 0, \quad (T - \lambda_j I)v_{i_j+1} = v_{i_j}, \quad \ldots, \quad (T - \lambda_j I)v_{i_{j+1}} = v_{i_{j+1}-1}.$$

Матрица оператора в жордановом базисе называется его *жордановой нормальной формой.*

125. (а) Проверьте, что базис из собственных векторов оператора является жордановым.

(б) Как может выглядеть жорданова нормальная форма диагонализуемого оператора?

126. Матрица оператора T в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ совпала с *жордановым блоком*:

$$\begin{pmatrix}
\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & & 0 & \lambda & 1 & 0 \\
0 & & \cdots & 0 & 0 & \lambda & 1 \\
0 & & & \cdots & 0 & 0 & \lambda
\end{pmatrix}.$$

(а) Проверьте, что $(e_1, \ldots, e_n)$ — жорданов базис для оператора T.

(б) Найдите минимальный и характеристический многочлен оператора T.

(в) Найдите все собственные векторы оператора T.

(г) Является ли базис $(e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + \ldots + e_n)$ жордановым для оператора T?

127. Пусть V — векторное пространство всех последовательностей, удовлетворяющих соотношению

(а) $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$; (б) $a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n)$; (в) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

Найдите жорданов базис и жорданову нормальную форму оператора левого сдвига на пространстве V (определённого в решении задачи 104).

128. Пусть V — векторное пространство всех многочленов степени не выше двух. Определим линейный оператор $T : V \to V$ формулой:

$$[Tf](x) = xf(x) \pmod{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

где через $g(x) \pmod{h(x)}$ обозначается остаток при делении многочлена $g(x)$ на многочлен $h(x)$.

(а) Проверьте, что T корректно определён (в частности, $T(f)$ — многочлен степени не выше двух).

(б) Найдите жорданов базис и жорданову нормальную форму оператора T. (Сравните ответ с базисом, построенным во втором решении задачи 18.)

129. Пусть V — векторное пространство из предыдущей задачи. Определим линейный оператор $T : V \to V$ формулой:

(а) $[Tf](x) = xf(x) \pmod{(x-1)^2(x-2)}$; (б) $[Tf](x) = xf(x) \pmod{(x-1)^3}$.

Найдите жорданов базис и жорданову нормальную форму оператора T.

130. Оператор $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ задан в стандартном базисе матрицей:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите жорданов базис и жорданову нормальную форму оператора T.

131. Пусть V — пространство всех вещественных полиномиальных функций от двух переменных x и y степени не выше 3 (то есть пространство, порождённое мономами $x^i y^j$, где $i + j \le 3$). Определим оператор $T : V \to V$ формулой:

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора T.

Список литературы

[Ar] M. Artin, *Algebra*, Pearson, 2011

[В] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры*, МЦНМО, 2019

[К] В.А. Кириченко, *Геометрия (линейная алгебра)*, 2020, серия коротких видеороликов

[Кр] А.Н. Крылов, О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем, Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, 1931, выпуск 4, 491–539

[Ш] А. Шень, *О “математической строгости” и школьном курсе математики*, МЦНМО, 2006

[Геометрия] А. Шень, *Геометрия в задачах*, МЦНМО, 2017