Геометрия, 4-й модуль 2021 г.

Домашнее задание 6. Срок сдачи 21 апреля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$ задано формулой $(u,v) := u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 2u_2v_2$.

(а) Проверьте, что форма $(\cdot,\cdot)$ билинейна, симметрична и положительно определена.

(б) Найдите длину вектора $(1,1)$ относительно данного скалярного произведения.

(в) Найдите косинус угла между векторами $(1,2)$ и $(1,1)$ относительно данного скалярного произведения.

(г) Найдите площадь параллелограмма, натянутого на векторы $(1,2)$ и $(3,5)$ в $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Пусть V — векторное пространство размерности 2021. Проверьте, что квадратичные формы на V образуют векторное пространство, и найдите размерность этого пространства.

Задача 3. Матрица Грама квадратичной формы в $\mathbb{R}^2$ в стандартном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу Грама этой же формы в базисе (v_1, v_2), где $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-1,-1)$.

Задача 4. Докажите, что если B — матрица Грама в стандартном базисе какой-нибудь положительно определённой квадратичной формы на $\mathbb{R}^n$, то найдётся такая вещественная матрица A, что $B = AA^t$.

Задача 5. В векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (x,y,z,t) задана квадратичная форма Минковского:

$$q(x,y,z,t) = -x^2 - y^2 - z^2 + t^2.$$

Обозначим через $(\cdot,\cdot)_M$ её поляризацию. Докажите, что для всех времяподобных векторов u и v (вектор u *времяподобен*, если $q(u) > 0$), выполнено обращённое неравенство Коши–Буняковского–Шварца:

$$(u,v)_M^2 \geq (u,u)_M(v,v)_M.$$

(“Косинус” больше либо равен единице.)