

Домашнее задание 7. Срок сдачи 28 апреля.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите все экстремумы (=максимумы и минимумы) полиномиальной функции степени два от двух переменных:

- (а) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 1$;
- (б) $f(x, y) = 4x^2 + 6xy + y^2 - 4x + 2y + 3$;
- (в) $f(x, y) = -10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2$.

Задача 2. Кривая на аффинной плоскости \mathbb{R}^2 задана уравнением второго порядка:

$$-10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2 = 0.$$

Определите тип кривой (эллипс, гипербола, парабола, пара прямых, ...).

Задача 3. Рассмотрим стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^n и ограничим его на гиперплоскость $U = \{x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Через e_1, \dots, e_n обозначим стандартный базис в \mathbb{R}^n .

(а) Найдите матрицу Грама скалярного произведения на U в базисе $\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$.

(б) Найдите ортонормальный базис в U , применив ортогонализацию Грама-Шмидта к базису $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$.

Задача 4. Матрица Грама билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$ в стандартном базисе в \mathbb{R}^3 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (а) Является ли форма b положительно определённой?
- (б) Найдите базис, в котором матрица Грама формы b диагональна.
- (в) Существует ли базис, в котором матрица Грама формы b диагональна, а на диагонали стоят числа 1, -1, -1?

Задача 5. Докажите, что у положительно определенной симметричной билинейной формы над \mathbb{R} диагональные значения матрицы Грама положительны. Верно ли обратное?