Геометрия, 4-й модуль 2020 г.

Семинары 13-14. Скалярное произведение

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ — это симметричная положительно определённая билинейная форма на вещественном векторном пространстве.

Вещественное векторное пространство с фиксированным скалярным произведением называется евклидовым.

Задача 1. Какие из следующих функций от двух вещественных переменных задают симметричные билинейные формы на одномерном векторном пространстве $\mathbb{R}$?

(а) $b(x,y)=x+y$; (б) $b(x,y)=x^2+y^2$; (в) $b(x,y)=|x||y|$; (г) $b(x,y)=xy$; (д) $b(x,y)=xy-1$; (е) $b(x,y)=2xy$; (ж) $b(x,y)=xy^2+x^2y$.

Задача 2. Какие из следующих функций (от двух аргументов) на $\mathbb{R}^2$ являются (а) билинейными формами; (б) симметрическими билинейными формами; (в) скалярными произведениями?

$$(1)\ b(u,v)=u_1u_2+v_1v_2;\quad (2)\ b(u,v)=u_1v_1+u_2v_2;\quad (3)\ b(u,v)=u_1v_1-u_2v_2;$$

$$(4)\ b(u,v)=u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_2v_2;\quad (5)\ b(u,v)=2u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+2u_2v_2.$$

Через (u_1,u_2) и (v_1,v_2) обозначаются координаты векторов u и v, соответственно.

Задача 3. Скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$ задано формулой $(u,v):=u_1v_1+2u_2v_2$.

(а) Найдите длину вектора $(1,1)$ относительно данного скалярного произведения.

(б) Найдите косинус угла между векторами $(1,2)$ и $(1,1)$ относительно данного скалярного произведения.

(в) Найдите площадь параллелограмма, натянутого на векторы $(1,2)$ и $(3,5)$ в $\mathbb{R}^2$.

Задача 4. Пусть V — пространство квадратных трёхчленов $f(x)=ax^2+bx+c$ с вещественными коэффициентами. Определим функцию (f,g) формулой:

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

(а) Является ли $(\cdot,\cdot)$ скалярным произведением?

(б) Найдите длины векторов x и x^2.

(в) Ортогональны ли векторы x и x^2?

(г) Приведите пример ортонормального базиса в V.

Задача 5 (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца)**.** Вспомните формулировку и доказательство неравенства Коши–Буняковского–Шварца для скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$.

Задача 6. На векторном пространстве V задана симметричная билинейная форма $b(\cdot,\cdot)$. Для некоторых векторов $u,v\in V$ известно, что $b(u,u)=1$, $b(v,v)=2$, $b(u+v,u+v)=3$.

(а) Могут ли векторы u и v быть линейно зависимы?

(б) Можно ли однозначно определить значение $b(u,v)$?

(в) Найдите $b(u-v,u-v)$.

Задача 7 (Поляризация квадратичной формы)**.** Пусть задана симметричная билинейная форма $b(\cdot,\cdot)$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$. Определим ассоциированную квадратичную форму $q : V \to \mathbb{F}$ по правилу $q(v) = b(v,v)$.

(а) Для каждой пары векторов $u, v \in V$ докажите тождество параллелограмма:

$$q(u+v) + q(u-v) = 2q(u) + 2q(v).$$

(б) Можно ли однозначно восстановить билинейную форму $b(\cdot,\cdot)$ по её ассоциированной квадратичной форме q? Если можно, напишите явную формулу. Если нет, приведите контрпример.

Задача 8. Пусть V пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A,B) = \frac{1}{2}\left(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)\right)$$

(такая форма называется *смешанным определителем*).

(а) Докажите, что форма $(\cdot,\cdot)$ билинейна и симметрична.

(б) Вычислите (A,B) для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(в) Выпишите явную формулу, выражающую (A,B) через коэффициенты матриц A и B.

(г) Является ли форма $(\cdot,\cdot)$ положительно определённой?

Задача 9. Пусть $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма, заданная формулой $q(v) := ax^2 + bxy + cy^2$, где (x,y) — координаты вектора v в стандартном базисе. При каких условиях на коэффициенты a, b, c

(а) форма не определена;

(б) форма положительно определена;

(в) форма отрицательно определена?

Задача 10. (а) Для каждого пункта предыдущей задачи выберите какую-нибудь квадратичную форму q, удовлетворяющую условиям этого пункта и нарисуйте множество всех таких точек $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ на аффинной вещественной плоскости, что $q(x,y) = 1$.

(б) К какому максимально простому виду можно привести квадратичную форму q линейной заменой координат?

Задача 11 (Многочлены Чебышёва)**.** Определим скалярное произведение на пространстве всех вещественных многочленов формулой:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(а) Найдите такой ортонормальный набор многочленов $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$, что $\deg f_i = i$.

(б) Покажите, что f_i пропорционален многочлену Чебышёва $T_i(x)$. (Напомним, что многочлен Чебышёва $T_n(x)$ определяется условием $T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi)$.)

(в) Докажите, что многочлены T_n и T_m ортогональны при $m \neq n$.