Геометрия, 4-й модуль 2021 г.

Семинары 15-16. Квадратичные формы, данные нам в ощущениях

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Функция $q : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$, сопоставляющая вектору скаляр, называется квадратичной формой, если q задаётся однородным многочленом степени два, то есть

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Задача 1. (а) Выпишите матрицу Грама симметричной билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$ в стандартном базисе (e_1, e_2) в $\mathbb{R}^2$, если известно, что

$$b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2; \quad b(e_1 - e_2, e_1 + e_2) = 1; \quad b(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = 2.$$

(б) Выясните, является ли форма из пункта (а) положительно определённой. Если является, найдите какой-нибудь ортонормированный базис относительно этой формы, применив ортогонализацию Грама-Шмидта к стандартному базису.

Задача 2 (Бескоординатное определение квадратичной формы)**.** Докажите, что функция $q : V \to \mathbb{F}$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$ является квадратичной формой тогда и только тогда, когда $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$ (однородность степени 2) и форма $(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v)$ билинейна.

Задача 3. Выпишите матрицы Грама в стандартном базисе следующих квадратичных форм на $\mathbb{R}^2$:

(а) $x_1^2 + x_2^2$; (б) $2x_1x_2$; (в) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Для каждой формы найдите ортонормированный базис (относительно стандартного скалярного произведения), в котором её матрица Грама диагональна.

Задача 4. Диагонализуйте операторы в ортонормированном базисе (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$):

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(г)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы выписаны в стандартном базисе в $\mathbb{R}^n$, через a обозначается вещественный параметр.

Задача 5. Приведите к главным осям коники, заданные уравнениями:

$$\text{(а)}\ x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2 = 1; \quad \text{(б)}\ x_1^2 + 2ax_1x_2 = 1.$$

Через a обозначается вещественный параметр.

Задача 6. Приведите к главным осям квадрику в $\mathbb{R}^3$, заданную уравнением:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1.$$

Задача 7. Пусть V — векторное пространство вещественных $n \times n$ матриц. Является ли функция

$$Q : V \to \mathbb{R}; \quad Q(A) := \operatorname{tr}(A^2)$$

квадратичной формой? Если является, то чему равна её поляризация?

Задача 8. Определим *эллипс с фокусами A и B* на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ как множество всех таких точек X, что сумма расстояний $|AX| + |BX|$ постоянна (и строго больше, чем $|AB|$).

(а) Покажите, что каждый эллипс можно перевести движением плоскости в кривую, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(б) Покажите, что сечение прямого кругового цилиндра $C = \{x^2 + y^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ плоскостью Π, не содержащей ось z, является эллипсом.

(в) Покажите, что фокусы эллипса из пункта (б) можно найти с помощью *сфер Данделена* таким образом. Поместим в цилиндр C две сферы радиуса R так, чтобы обе сферы касались плоскости Π (одна сверху, другая снизу). Тогда точки касания — это в точности фокусы эллипса $C \cap \Pi$.

Задача 9. (а) Дайте геометрическое определение гиперболы и параболы, аналогичное определению эллипса из задачи 1.

(б) Покажите, что каждая гипербола конгруэнтна кривой (=переводится движением плоскости в эту кривую), заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(в) Покажите, что каждая парабола подобна параболе $\{x^2 - y = 0\}$.

(г) Придумайте способ искать фокусы гиперболы и фокус параболы, аналогичный способу из пункта 1(в).

Задача 10. Покажите, что каждая непустая коника в $\mathbb{R}^2$ конгруэнтна одной из следующих кривых:

(1) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; (2) гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; (3) парабола $a^2x^2 - y = 0$;

(4) пара прямых $xy = 0$; (5) двойная прямая $x^2 = 0$; (6) точка $x^2 + y^2 = 0$.

Задача 11. (а) Пусть $q(x, y, z)$ — невырожденная квадратичная форма (= ранг её матрицы в каком-нибудь базисе равен 3). Докажите, что если множество $\{q(x, y, z) = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ непусто, то оно конгруэнтно одной из следующих поверхностей:

(1) эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; (2) однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

(3) двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

(б) Пусть $Q(x, y, z)$ — произвольный многочлен степени 2 (необязательно однородный). Докажите, что если множество $\{Q(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая поверхность, не являющаяся объединением семейства параллельных прямых, то она конгруэнтна либо одной из квадрик пункта (а), либо одной из следующих квадрик:

(4) эллиптический параболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 1$; (5) гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - z = 1$.