Геометрия, 4-й модуль 2021 г.

Семинары 17-18. Сопряжённые операторы в евклидовом пространстве

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Если $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то сопряжённый оператор $T^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяется с помощью условия:

$$(u, T^*(v)) = (T(u), v) \text{ для всех векторов } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Задача 1. (а) Докажите, что сопряжённый оператор существует и единственен.

(б) Докажите, что $(T^*)^* = T$.

Задача 2. (а) Линейный оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в стандартном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу сопряжённого (относительно стандартного скалярного произведения) оператора T^* в том же базисе.

(б) Линейный оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в ортонормированном базисе (u_1, u_2) матрицей A из пункта (а). Найдите матрицу сопряжённого оператора T^* в базисе (u_1, u_2).

(в) Линейный оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в базисе (v_1, v_2) матрицей A из пункта (а). Найдите матрицу сопряжённого оператора T^* в базисе (v_1, v_2), если известно, что $(v_1, v_1) = (v_1, v_2) = 1$ и $(v_2, v_2) = 2$.

Задача 3. Пусть u и v — два ненулевых вектора в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если $T^*(u) = v$, то оператор T переводит гиперплоскость, ортогональную вектору u, в гиперплоскость, ортогональную вектору v.

Задача 4 (Геометрический смысл сопряжённого оператора)**.** Оператор $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сопряжён оператору $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда S переводит гиперплоскость, ортогональную вектору u, в гиперплоскость, ортогональную вектору $T(u)$ для всех $u \in \mathbb{R}^n$.

Задача 5. Пусть v — собственный вектор оператора $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с собственным значением λ. Докажите, что v будет собственным вектором оператора T^*. С каким собственным значением?

Задача 6. Докажите, что если $T = T^*$ (то есть оператор T самосопряжён), то ядро и образ оператора T ортогональны друг другу.

Задача 7. (а) Матрица оператора T в ортонормальном базисе равна A. Чему равна матрица оператора T^* в том же базисе?

(б) Докажите, что матрица самосопряжённого оператора в ортнормальном базисе симметрична.

Задача 8. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство, а $U^\perp$ — его ортогональное дополнение. Докажите, что

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp.$$

Задача 9. (а) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — инвариантное подпространство оператора $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Докажите, что ортогональное дополнение $U^\perp$ будет инвариантым подпространством относительно сопряжённого оператора T^*.

(б) Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — самосопряжённый оператор с характеристическим многочленом $(t-\lambda)^n$, где λ — вещественное число. Найдите жорданову нормальную форму оператора T.

(в) Докажите, что каждый самосопряжённый оператор на двумерном пространстве диагонализуется над $\mathbb{R}$ (в частности, все его собственные значения вещественны).

Задача 10. Докажите, что два собственных вектора самосопряжённого оператора либо коллинеарны, либо ортогональны.

Задача 11. (а) Вспомните определение ортогонального оператора.

(б) Докажите, что оператор $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ортогонален тогда и только тогда, когда

$$TT^* = I.$$

(в) Пусть A — матрица оператора T в ортонормальном базисе. Докажите, что T ортогонален тогда и только тогда, когда строки матрицы A образуют ортонормальный базис в $\mathbb{R}^n$.