

Домашнее задание 8. Срок сдачи 19 мая.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Пусть V — подпространство в пространстве всех функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, порождённое функциями $\sin(kx)$ и $\cos(kx)$, где $k = 0, 1, \dots, n$.

(а) Покажите, что форма

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

задаёт на V скалярное произведение.

(б) Пусть D — оператор дифференцирования на V (то есть $D(f) = f'$). Найдите сопряжённый оператор D^* относительно скалярного произведения из пункта (а).

Задача 2. Найдите длины полуосей эллипсоида, заданного уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = 1.$$

Задача 3. Найдите сигнатуру квадратичной формы Q на пространстве вещественных 2×2 -матриц, где

$$Q(A) = \det(A).$$

Задача 4. Найдите канонический вид квадратичной формы над \mathbb{R} :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Задача 5. Существует ли на \mathbb{R}^4 квадратичная форма с главными угловыми минорами: $M_1 < 0$, $M_2 = 0$, $M_3 < 0$, $M_4 > 0$?