

Домашнее задание 9. Срок сдачи 26 мая.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Пусть l_1 и l_2 — проективные прямые в \mathbb{P}^2 . Известно, что пересечения прямых l_1 и l_2 с аффинной картой $\mathbb{A}_0^2 = \{x_0 \neq 0\}$ в координатах $t_1 = \frac{x_1}{x_0}$ и $t_2 = \frac{x_2}{x_0}$ задаются уравнениями $t_1 + 2t_2 = 6$ и $t_1 + t_2 = 4$, соответственно. Какими уравнениями задаются пересечения этих прямых с аффинной картой $\mathbb{A}_1^2 = \{x_1 \neq 0\}$ в координатах $u_1 = \frac{x_0}{x_1}$ и $u_2 = \frac{x_2}{x_1}$?

Задача 2. Назовём *комплексной окружностью* аффинную конику в \mathbb{C}^2 , заданную уравнением $(t_1 - a)^2 + (t_2 - b)^2 = c$ (где $a, b, c \in \mathbb{C}$, и $c \neq 0$). Покажите, что пересечение комплексной проективной коники с аффинной картой \mathbb{C}_0^2 является комплексной окружностью тогда и только тогда, когда коника проходит через точки $(0 : i : \pm 1)$ (“мнимые бесконечно удалённые точки”). Напомним, что проективной коникой называется кривая на проективной плоскости, заданная в однородных координатах однородным уравнением степени два:

$$Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_1^2 + Ex_1x_2 + Fx_2^2 = 0.$$

Задача 3. Найдите количество точек и прямых в проективной плоскости над полем из q элементов.

Задача 4. Пусть t — двойное отношение четвёрки точек (a, b, c, d) в \mathbb{P}^1 . Чему может быть равно двойное отношение четвёрки точек $(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d))$, полученной из (a, b, c, d) перестановкой $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$?

Задача 5. Даны две различные прямые l и l' в аффинной карте \mathbb{R}^2 . Известно, что проективное преобразование T переводит точки $a, b, c \in l$ в точки $a', b', c' \in l'$. Постройте одной линейкой образ точки $d \in l$ при преобразовании T .