

Семинары 19-20. Канонический вид квадратичных форм.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Каждая квадратичная форма на конечномерном вещественном векторном пространстве в подходящей системе координат приводится к каноническому виду:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Пара чисел (p, q) называется сигнатурой квадратичной формы.

Задача 1. Докажите, что сигнатура — инвариант квадратичной формы (то есть зависит только от формы, а не от тех координат, в которых форму привели к каноническому виду).

Задача 2. Найдите сигнатуру квадратичной формы Q на пространстве вещественных $n \times n$ -матриц, где

$$Q(A) = \operatorname{tr}(A^2).$$

Задача 3. Докажите, что каждая квадратичная форма на \mathbb{C}^n заменой координат приводится к сумме квадратов:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2,$$

причём количество квадратов k не зависит от выбора координат.

Задача 4. Квадратичная форма на \mathbb{R}^4 в некотором базисе задана матрицей Грама, у которой на диагонали стоит -1 , а вне диагонали 2 . Найдите сигнатуру этой формы.

Задача 5. Найдите сигнатуру квадратичной формы q на \mathbb{R}^3 , заданной формулой:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = - \sum_{i=1}^4 x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} 4x_i x_j.$$

Задача 6. Найдите канонический вид квадратичной формы над \mathbb{R} :

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

Задача 7. Существует ли на \mathbb{R}^4 квадратичная форма с главными угловыми минорами:

- (а) $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 > 0, M_4 > 0$;
- (б) $M_1 < 0, M_2 = 0, M_3 = 0, M_4 > 0$?

Задача 8. Приведите коники на евклидовой плоскости к главным осям

$$(а) -10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2 = 0.$$

$$(б) 4x^2 + 6xy + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0.$$

Задача 9. Квадратичная форма в некоем ортонормированном базисе в \mathbb{R}^n имеет матрицу с элементами a на диагонали и b вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому ортонормированному базису?

Задача 10 (Критерий Сильвестра). (а) Докажите, что квадратичная форма на \mathbb{R}^n положительно определена тогда и только тогда, когда все её главные угловые миноры положительны.

(б) Докажите, что квадратичная форма на \mathbb{R}^n отрицательно определена тогда и только тогда, когда все её главные угловые миноры знакопереваются.

(в) Известно, что все главные угловые миноры квадратичной формы отличны от нуля. Придумайте правило вычисления сигнатуры по последовательности знаков миноров.