Геометрия, 4-й модуль 2021 г.

Семинары 21-22. Проективная плоскость.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Центральной проекцией точки A из точки O (центра проекции) на гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{RP}^n$ называется точка A', в которой прямая OA пересекает гиперплоскость Π. Центральная проекция определена для всех точек, кроме O.

Задача 1. На плоскости дан отрезок AB с концами $A = (1, 0)$ и $B = (2, 0)$. Какие подмножества прямой можно получить при центральной проекции отрезка AB из точки $O \in \mathbb{R}^2$ на прямую $\Pi = \{x_1 = 0\}$? (Ответ зависит от выбора точки O.)

Задача 2. (а) Какой фигурой может быть проекция треугольника на плоскость в $\mathbb{R}^3$, если центр проекции не лежит в плоскости треугольника? (Ответ зависит от выбора центра проекции.)

(б) Тот же вопрос для круга $\{(x_1, x_2, 1) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

Задача 3 (Теорема Дезарга)**.** (а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 на плоскости пересекаются в одной точке O, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой. (Иными словами, если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ есть центр перспективы, то у них есть и ось перспективы.)

(б) Докажите обратное утверждение.

Задача 4. (а) Докажите, что каждую тройку прямых в векторной плоскости $\mathbb{F}^2$ с координатами (x, y) можно перевести линейным преобразованием в тройку прямых $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ и $\{y = x\}$.

(б) Куда перейдёт прямая $\{y = kx\}$, где $k \in \mathbb{F}$, при преобразовании из пункта (а)?

Задача 5. Отождествим проективную прямую $\mathbb{FP}^1$ с множеством $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Напомним, что преобразование множества $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ является проективным тогда и только тогда, когда оно представляется в виде

$$x \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

где a, b, c, d — такие элементы поля $\mathbb{F}$, что $ad - bc \neq 0$.

(а) Выпишите явную формулу для дробно-линейного преобразования, которое переводит точки p, q и r в точки ∞, 0 и 1, соответственно.

(б) Докажите, что проективное преобразование прямой $\mathbb{FP}^1$ однозначно определяется образами трех произвольных точек.

(в) Куда перейдёт точка k при преобразовании из пункта (а)?

Для запоминания. Двойным отношением $[A, B; C, D]$ точек A, B, C, $D \in \mathbb{F}$ называется точка проективной прямой с однородными координатами $((A - C)(B - D) : (A - D)(B - C))$.

Задача 6. На вещественной аффинной плоскости даны две прямые. При проекции с центром в точке O точки A, B, C и D на первой прямой перешли в точки A', B', C' и D', соответственно, на второй прямой. Докажите, что $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ (двойное отношение четырёх точек не меняется при проекциях).

Задача 7. (а) Пусть $l_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_1 = 0\}$ и $l_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_1 - x_2 = 0\}$ — проективные прямые в $\mathbb{RP}^2$. Нарисуйте пересечения прямых l_1 и l_2 с аффинными картами $\mathbb{A}^2_0 = \{x_0 \neq 0\}$, $\mathbb{A}^2_1 = \{x_1 \neq 0\}$ и $\mathbb{A}^2_2 = \{x_2 \neq 0\}$.

(б) Тот же вопрос для кривой (*проективной коники*), заданной однородным уравнением степени два: $x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_2 = 0$.

Задача 8. Пусть $l = \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{RP}^2$ — проективная прямая.

(а) Покажите, что $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{A}^2_0 \sqcup l$ (то есть про прямую l можно думать как про "бесконечно удалённую прямую" относительно аффинной карты $\mathbb{A}^2_0$).

(б) Пусть $p \in l$ — произвольная точка. Покажите, что любую аффинную прямую в $\mathbb{A}^2_0$ можно проективным преобразованием перевести в $l \setminus \{p\}$.

Задача 9 (Теорема Паппа)**.** (а) На одной стороне угла выбраны точки A, B и C, а на другой — точки A', B' и C' (отличные от вершины угла), так что CA' и $C'A$ параллельны, и CB' и $C'B$ параллельны. Докажите, что и отрезки AB' и $A'B$ параллельны.

(б) Выведите из пункта (а) теорему Паппа:

Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Тогда точки пересечения прямых AB' и $B'A$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.

Задача 10. (а) Докажите, что проективное преобразование проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ однозначно определяется образами четырёх точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

(б) Докажите, что проективное преобразование n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ однозначно определяется образами $n+2$ точек, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

Задача 11. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

(1) с каждой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

(2) для каждой пары маршрутов найдётся, и притом единственная, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

Известно, что на каждом маршруте ровно три остановки, и маршрутов больше одного. Сколько автобусных маршрутов в городе?

Задача 12. В городе 57 автобусных маршрутов, удовлетворяющих правилам (1) и (2) из задачи 4. Известно, что на каждом маршруте не менее трёх остановок. Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

Задача 13 (Мини-Доббль $\star$)**.** Опишите проективную плоскость над полем из четырёх элементов. Описание можно дать в виде графа, матрицы инцидентности или эскиза карточек для игры в Доббль. (Из описания должно быть понятно, какие точки лежат на каких прямых, и видно, что выполняются все аксиомы проективной плоскости.)

Задача 14 (Недезаргова плоскость $\star$)**.** Приведите пример плоскости, которая удовлетворяет трём аксиомам проективной плоскости, но в которой неверна теорема Дезарга.