

Контрольная 17 мая

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Бродский Давид

Задача	1	2	3	4	5	6	Итого
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как векторное пространство над \mathbb{R} . Являются ли линейно зависимыми векторы:

$$(x + 1), \quad (x + 1)^2, \quad x^2 - 2x - 3?$$

Задача 2. Найдите ядро, образ и ранг оператора $T : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^5$, который в некоторых базисах записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \\ 14 & 24 & 34 \\ 15 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в тех же самых базисах.)

Задача 3. Найдите ориентированный объём параллелепипеда в \mathbb{R}^4 , натянутого на векторы $v_1 + v_2 + v_3 - v_4$, $v_1 + v_2 - v_3 + v_4$, $v_1 - v_2 + v_3 + v_4$ и $-v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, если известно, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1 , v_2 , v_3 и v_4 равен 3.

Задача 4. Найдите площадь параллелограмма в евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 , натянутого на векторы u и v , если

$$u = (3, 1, 2, -1);$$

$$v = (1, -2, 2, 1).$$

Задача 5. Квадратичная форма на \mathbb{R}^4 в некотором базисе задана матрицей Грама, у которой на диагонали стоит 1, а вне диагонали 2. Найдите сигнатуру этой формы.

Задача 6. Все вершины параллелепипеда в трёхмерном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что строго внутри него есть ровно 9 целочисленных точек. (Объём единичного куба равен единице.)