

Контрольная 17 мая

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Гридунов Олег

Задача	1	2	3	4	5	6	Итог
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как векторное пространство над \mathbb{R} . Являются ли линейно зависимыми векторы:

$$(x + 1), \quad (x + 1)^2, \quad x^2 - 2x + 2?$$

Задача 2. Найдите ядро, образ и ранг оператора в \mathbb{Q}^4 , который в некотором базисе записывается “таблицей сложения”, то есть матрицей 4×4 , у которой на пересечении i -той строки и j -того столбца стоит $i + j$. (В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.) Строки и столбцы матрицы нумеруются, начиная с единицы (не с нуля).

Задача 3. Вычислите определитель 4×4 -матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \sqrt{5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найдите площадь параллелограмма в евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 , натянутого на векторы u и v , если

$$u = (3, 1, 2, -1);$$

$$v = (1, -2, 2, 1).$$

Задача 5. Квадратичная форма на \mathbb{R}^4 в некотором базисе задана матрицей Грама, у которой на диагонали стоит 3, а вне диагонали 2. Найдите сигнатуру этой формы.

Задача 6. Оператор T на \mathbb{R}^4 удовлетворяет уравнению $(T + I)^2(T^2 + I) = 0$ (через I обозначается тождественный оператор). Чему могут быть равны характеристический и минимальный многочлены этого оператора? (Нужно перечислить все возможные пары.)