

ТРИВИУМ, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2021 г.

Контрольная 17 мая

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Колесников Глеб

Задача	1	2	3	4	5	6	Итого
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как векторное пространство над \mathbb{R} . Являются ли линейно зависимыми векторы:

$$(x + 1), \quad (x + 1)^2, \quad x^2 - 2x - 3?$$

Задача 2. Найдите ядро, образ и ранг оператора $T : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, который в некотором базисе записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{pmatrix}.$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 3. Найдите ориентированный объём параллелепипеда в \mathbb{R}^4 , натянутого на векторы $v_1 + v_2 + v_3 - v_4$, $v_1 + v_2 - v_3 + v_4$, $v_1 - v_2 + v_3 + v_4$ и $-v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, если известно, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1 , v_2 , v_3 и v_4 равен 2.

Задача 4. Найдите синус угла между вектором v и гиперплоскостью Π в евклидовом аффинном пространстве \mathbb{R}^4 , если

$$\begin{aligned} \Pi &= \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\}; \\ v &= (1, 2, -2, 0). \end{aligned}$$

Задача 5. Квадратичная форма на \mathbb{R}^4 в некотором базисе задана матрицей Грама, у которой на диагонали стоит 1, а вне диагонали 2. Найдите сигнатуру этой формы.

Задача 6. Оператор T на \mathbb{R}^4 удовлетворяет уравнению $(T - I)^2(T^2 + I) = 0$ (через I обозначается тождественный оператор). Чему могут быть равны характеристический и минимальный многочлены этого оператора? (Нужно перечислить все возможные пары.)