

ТРИВИУМ, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2021 г.

Контрольная 17 мая

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Щербатенко Константин

Задача	1	2	3	4	5	6	Итого
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Рассмотрим поле \mathbb{R} как векторное пространство над \mathbb{Q} . Являются ли линейно независимыми векторы

$$3 - 3\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2} + 1} ?$$

Задача 2. Найдите ядро, образ и ранг оператора $T : \mathbb{Q}^5 \rightarrow \mathbb{Q}^3$, который в некоторых базисах записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 & 51 \\ 12 & 22 & 32 & 42 & 52 \\ 13 & 23 & 33 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в тех же самых базисах.)

Задача 3. Вычислите определитель (5×5) -матрицы с элементами 3 на диагонали и 1 вне неё.

Задача 4. Найдите расстояние от точки a до гиперплоскости Π в евклидовом аффинном пространстве \mathbb{R}^4 , если

$$\begin{aligned} \Pi &= \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\}; \\ a &= (1, -2, 5, 8). \end{aligned}$$

Задача 5. Квадратичная форма на \mathbb{R}^4 в некотором базисе задана матрицей Грама, у которой на диагонали стоит 2, а вне диагонали 3. Найдите сигнатуру этой формы.

Задача 6. Все вершины параллелепипеда в трёхмерном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что строго внутри него есть ровно 9 целочисленных точек. (Объём единичного куба равен единице.)