

ТРИВИУМ, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2021 г.

Контрольная 17 мая

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	Итог
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

Задача 2. Определите, компактно ли подмножество X вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{n}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{3n}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Задача 3. Кольцо для салфеток $R(13, 12)$ состоит из всех точек шара $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 13^2\}$ в трёхмерном евклидовом пространстве, которые находятся на расстоянии не меньше, чем 12 от оси z . Найдите объём кольца для салфеток $R(13, 12)$.

(Вы можете использовать любое известное Вам определение объёма или считать, что объём — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt,$$

где функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ сопоставляет числу t площадь сечения $R(13, 12) \cap \{z = t\}$, а пределы интегрирования t_1 и t_2 равны, соответственно, минимальному и максимальному значению z -координаты на множестве $R(13, 12)$.)

Задача 4. Найдите первообразную функции:

$$x^n e^{-x}$$

для всех натуральных n .

Задача 5. Сколько решений уравнение $x = \cos x$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$?

Задача 6. Дана дифференцируемая функция $F(x, y)$ от двух вещественных переменных. Найдите производную функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке 2, где

$$f(t) = F(t^2, e^t),$$

если известно, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y^2.$$