

**Контрольная 24 мая**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Фамилия и имя студента:**

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Итог |
|--------|---|---|---|---|---|---|------|
| Оценка |   |   |   |   |   |   |      |

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

**Задача 1.** Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

**Задача 2.** Определите, компактно ли подмножество  $X$  вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{2n}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Задача 3.** Кривая на евклидовой координатной плоскости задана уравнением  $(3y)^2 = (2x)^3$ . Найдите длину дуги этой кривой между точками  $(0, 0)$  и  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ .

(Вы можете использовать любое известное Вам определение длины или считать, что длина — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt,$$

где функция  $f : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$  дифференцируема и задаёт взаимно-однозначное отображение между отрезком  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  и дугой, длину которой требуется найти.)

**Задача 4.** Найдите первообразную функции:

$$x^n e^{-x}$$

для всех натуральных  $n$ .

**Задача 5.** Сколько решений уравнение  $x = \cos x$  имеет на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ?

**Задача 6.** Две прямые на евклидовой координатной плоскости заданы уравнениями  $x + y = 1$  и  $y = 1$ . Найдите угол между образами этих прямых при отображении

$$I : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \quad I : (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

в точке  $I(0, 1)$ .