

ТРИВИУМ, ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2021 г.

Контрольная 31 мая

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Итог |
|--------|---|---|---|---|---|---|------|
| Оценка |   |   |   |   |   |   |      |

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

**Задача 1.** Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

**Задача 2.** Определите, компактно ли подмножество  $X$  вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{n}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{3n}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Задача 3.** Парабола на евклидовой координатной плоскости задана уравнением  $y = x^2$ . Найдите длину дуги параболы между точками  $(-1, 1)$  и  $(2, 4)$ .

(Вы можете использовать любое известное Вам определение длины или считать, что длина — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt,$$

где функция  $f : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$  дифференцируема и задаёт взаимно-однозначное отображение между отрезком  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  и дугой, длину которой требуется найти.)

**Задача 4.** Найдите первообразную функции:

$$x^n e^{-x}$$

для всех натуральных  $n$ .

**Задача 5.** Найдите отрезок максимальной длины, на котором функция

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$$

является выпуклой.

**Задача 6.** Множество  $C$  на вещественной координатной плоскости состоит из всех точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$(x^2 - y - 1)(x - y^3) = 0.$$

У каких точек  $(x_0, y_0) \in C$  нельзя найти такой открытой окрестности  $U \subset \mathbb{R}^2$ , что  $C \cap U$  совпадает с графиком какой-нибудь функции  $y = f(x)$ ?