

Контрольная 7 июня

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	Итого
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

Задача 2. Определите, компактно ли подмножество X вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{n}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{3n}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Задача 3. Кривая на евклидовой координатной плоскости задана уравнением $(3y)^2 = (2x)^3$. Найдите длину дуги этой кривой между точками $(0, 0)$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

(Вы можете использовать любое известное Вам определение длины или считать, что длина — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt,$$

где функция $f : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ дифференцируема и задаёт взаимно-однозначное отображение между отрезком $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ и дугой, длину которой требуется найти.)

Задача 4. Найдите первообразную функции:

$$x^n e^{-x}$$

для всех натуральных n .

Задача 5. Найдите максимальное и минимальное значения функции

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

на отрезке $[-\frac{1}{2}, 2]$.

Задача 6. Дана дифференцируемая функция $F(x, y)$ от двух вещественных переменных. Найдите производную функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке 2, где

$$f(t) = F(t^2, e^t),$$

если известно, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y^2.$$