

Щербатенко Константин

Задача	1	2	3	4	5	6	Итог
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

**Задача 1.** Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

**Задача 2.** Определите, компактно ли подмножество  $X$  вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{n}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{3n}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Задача 3.** Кольцо для салфеток  $R(5, 4)$  состоит из всех точек шара  $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2\}$  в трёхмерном евклидовом пространстве, которые находятся на расстоянии не меньше, чем 4 от оси  $z$ . Найдите объём кольца для салфеток  $R(5, 4)$ .

(Вы можете использовать любое известное Вам определение объёма или считать, что объём — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt,$$

где функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  сопоставляет числу  $t$  площадь сечения  $R(5, 4) \cap \{z = t\}$ , а пределы интегрирования  $t_1$  и  $t_2$  равны, соответственно, минимальному и максимальному значению  $z$ -координаты на множестве  $R(5, 4)$ .)

**Задача 4.** Найдите первообразную рациональной функции:

$$x^n e^x.$$

**Задача 5.** Сколько решений уравнение  $x = \cos x$  имеет на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ?

**Задача 6.** Множество  $C$  на вещественной координатной плоскости состоит из всех точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$(x^2 - y - 1)(x - y^3) = 0.$$

У каких точек  $(x_0, y_0) \in C$  нельзя найти такой открытой окрестности  $U \subset \mathbb{R}^2$ , что  $C \cap U$  совпадает с графиком какой-нибудь функции  $y = f(x)$ ?