

Контрольная 18 июня

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Соклаков Егор

Задача	1	2	3	4	5	6	Итог
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

Задача 1. Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

Задача 2. Определите, компактно ли подмножество X вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{n}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{3n}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Задача 3. Кривая на евклидовой координатной плоскости задана уравнением $(3y)^2 = (2x)^3$. Найдите длину дуги этой кривой между точками $(0, 0)$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

(Вы можете использовать любое известное Вам определение длины или считать, что длина — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt,$$

где функция $f : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ дифференцируема и задаёт взаимно-однозначное отображение между отрезком $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ и дугой, длину которой требуется найти.)

Задача 4. Найдите первообразную рациональной функции:

$$\frac{x^n + 1}{x + 1}.$$

Задача 5. Сколько решений уравнение $x = \cos x$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$?

Задача 6. Множество C на вещественной координатной плоскости состоит из всех точек (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$(x^2 - y - 1)(x - y^3) = 0.$$

У каких точек $(x_0, y_0) \in C$ нельзя найти такой открытой окрестности $U \subset \mathbb{R}^2$, что $C \cap U$ совпадает с графиком какой-нибудь функции $y = f(x)$?