ВСЕРОССИЙСКАЯ ЗАОЧНАЯ
МНОГОПРЕДМЕТНАЯ ШКОЛА

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В. Е. Епихин

Комплексные числа

Методическая разработка для учащихся
Заочной школы «Юный математик» при ВЗМШ и МЦНМО

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 51 (023)
ББК 22.1
Е67

Епихин В. Е.

Е67 Комплексные числа: методическая разработка для учащихся Заочной школы «Юный математик» при ВЗМШ и МЦНМО. — М: МЦНМО, 2009. — 32 с.

В разработке рассмотрены основные понятия, связанные с комплексными числами и их геометрической интерпретацией, а также с преобразованием инверсии и некоторыми другими отображениями комплексной плоскости; приведены примеры решения задач.

ББК 22.1

Епихин Валерий Евгеньевич

Комплексные числа

Редактор *А. В. Деревянкин* Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано в печать 27/VII 2009 года. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Физ. печ. л. 2,00.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Тираж 500 экз. Заказ № 5705.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83.

Введение

Понятие о комплексных числах появилось в середине 16 в. в связи с попытками математиков того времени получить формулу, выражающую корни кубического уравнения через его коэффициенты.

В 1545 г. была издана книга «Великое искусство, или об алгебраических преобразованиях», в которой Дж. Кардано (1501—1576) опубликовал формулу для корней кубического уравнения, открытую его современниками С. дель Ферро (1465—1526) и Н. Тартальей (1500—1557). Обнаружилось, что в случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано появляются квадратные корни из отрицательного числа. Квадратные корни из отрицательных чисел назвали *мнимыми числами*. В «Алгебре» итальянского математика Р. Бомбелли в 1579 г. было показано, что вычисление выражений, содержащих квадратные корни из отрицательных чисел, по определённым правилам позволяет получать достоверные результаты. Мнимые числа стали широко использовать при решении уравнений.

На рубеже 18 и 19 вв. К. Ф. Гаусс подробно исследовал мнимые числа. Назвав их *компле́ксными числами*, он дал им геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный (1799).

В настоящее время комплексные числа широко используются в математике, физике и технике; их применение часто упрощает решение самых разных задач.

§ 1. Основные определения и свойства

Определение. *Компле́ксным числом* называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$. Множество комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

Определение. Два комплексных числа $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Определение. *Суммой* комплексных чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называется комплексное число $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Определение. *Произведением* комплексных чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называется комплексное число $(x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$.

Операции суммы и произведения комплексных чисел обладают следующими свойствами, которые легко проверить, используя только определения.

I. Свойства суммы.

1. *Коммутативность*: $z_1+z_2=z_2+z_1$.

2. *Ассоциативность*: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

II. Свойства произведения.

3. *Коммутативность*: $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

4. *Ассоциативность*: $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

III. Свойство дистрибутивности: $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$.

Доказательства приведённых свойств оставляем вам в качестве самостоятельного упражнения.

Между комплексными числами вида $(x;0)$ и множеством действительных чисел $\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ имеется взаимно однозначное соответствие, а именно: двум различным комплексным числам $(x_1;0)$, $(x_2;0)$ ставятся в соответствие два различных действительных числа x_1, x_2. Сумме комплексных чисел $(x_1;0)$, $(x_2;0)$ соответствует сумма действительных чисел x_1, x_2, и обратно; произведению комплексных чисел — произведение соответствующих действительных чисел, и обратно.

Алгебраической формой записи комплексного числа $z=(x;y)$ называется запись вида $z=x+iy$, где i — формальный символ, называемый *мнимой единицей*.

Примечание. Если x или y равно 0, то соответствующее слагаемое принято опускать, например: $3+0\cdot i=3$, $0-4i=-4i$, $0+0i=0$.

Сложение и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, осуществляется по обычным правилам алгебры с учётом равенства $i^2=-1$. Это вытекает из приведённых выше свойств и определения умножения комплексных чисел: в самом деле, пусть $z_1=(x_1;y_1)=x_1+iy_1$, $z_2=(x_2;y_2)=x_2+iy_2$. Тогда по определению

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+x_2y_1)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

С другой стороны,

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1\cdot iy_2+x_2\cdot iy_1+(iy_1)(iy_2)=$$
$$=(x_1x_2+i^2y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Видим, что для того, чтобы получить результат, соответствующий определению, необходимо и достаточно положить $i^2=-1$.

Определим теперь разность и частное комплексных чисел.

Определение. *Разностью* комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, для которого выполнено равенство $z+z_2=z_1$.

Разность чисел z_1 и z_2 обозначается через z_1-z_2. Можно доказать, что для любых двух комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ их

разность всегда существует и определяется единственным образом по формуле $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$.

Таким образом, и вычитание комплексных чисел осуществляется по обычным правилам алгебры. Проиллюстрируем выполнение действий с комплексными числами на примере.

1. Вычислите: $(2+6i)-(3-5i)(-1+2i)$.

Решение. $(2+6i)-(3-5i)(-1+2i)=2+6i-(-3+6i+5i+10)=$ $=2+6i-(7+11i)=-5-5i$.

Ответ: $-5-5i$.

Определение. Комплексные числа $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$ называются *комплексно сопряжёнными*.

2. Докажите, что $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ для любых комплексных чисел z_1 и z_2.

Решение. Представим данные числа в алгебраической форме: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Тогда

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Далее,

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)=\overline{z_1\cdot z_2},$$

что и требовалось доказать.

Определение. *Модулем*, или *абсолютной величиной* комплексного числа $z=x+iy$ называется действительное число $\sqrt{x^2+y^2}$, обозначаемое через $|z|$.

Заметим, что

$$z\cdot\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2=|z|^2.$$

Определение. *Частным* комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2\neq 0$, называется комплексное число z, для которого выполнено равенство $z\cdot z_2=z_1$.

Частное чисел z_1 и z_2 обозначается через $z_1:z_2$ или $\dfrac{z_1}{z_2}$. Можно доказать, что для любых двух комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+$ $+iy_2\neq 0$ их частное всегда существует и определяется единственным образом по формуле $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

П р и м е ч а н и е. Отметим, что на практике деление комплексных чисел удобнее выполнять не при помощи непосредственного использования приведённой формулы, а используя равенство $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$, из которого она и следует. Поясним этот способ на примере.

3. Вычислите: $\frac{3-i}{1-2i}$.

Р е ш е н и е. $\frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i-i+2}{5} = 1+i.$

О т в е т: $1+i$.

Из определения модуля комплексного числа вытекает цепочка равенств

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} = (z \cdot w) \cdot (\overline{z} \cdot \overline{w}) = (z \cdot \overline{z}) \cdot (w \cdot \overline{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2,$$

из которой следует формула $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. В частности, при $z_2 \neq 0$ имеем равенство $|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2|$, откуда $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

О п р е д е л е н и е. *Действительной частью* комплексного числа $z = x+iy$ называется действительное число x, обозначаемое через $\operatorname{Re} z$ [1].

О п р е д е л е н и е. *Мнимой частью* комплексного числа $z = x+iy$ называется действительное число y, обозначаемое через $\operatorname{Im} z$ [2].

Например,

$$\operatorname{Re}(1-2i) = 1, \operatorname{Im}(1-2i) = -2;$$
$$\operatorname{Re}(5i) = 0, \operatorname{Im}(5i) = 5.$$

Используя операцию комплексного сопряжения, можно алгебраически выразить действительную и мнимую части комплексного числа, а именно:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

(эти формулы следуют из очевидных равенств $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z-\overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$).

О п р е д е л е н и е. Комплексное число вида iy, где $y \neq 0$, называется *чисто мнимым*.

4. Найдите все значения параметра $a \in \mathbb{R}$, при которых число $(a+i)^2 - 3 - 4i$ является чисто мнимым.

[1] От латинского «realus» — «действительный».
[2] От латинского «imaginarius» — «мнимый».

Р е ш е н и е. Поскольку

$$(a+i)^2 - 3 - 4i = a^2 + 2ai - 1 - 3 - 4i = (a^2-4) + (2a-4)i,$$

то чисто мнимым это число будет при $a^2 - 4 = 0$, $2a - 4 \neq 0$, т. е. при $a = -2$.

О т в е т: -2.

У п р а ж н е н и я

5. Вычислите:
а) $(8-2i) + (1-3i) - (15+7i) - (23-6i)$;
б) $(1+i)(4-i)(-3+7i) + (3-2i)(i^3-4)$;
в) $\frac{17-i}{1-3i}$; г) $\frac{-13+4i}{6+i} - \left(\frac{1+3i}{1+i}\right)^2$.

6. Найдите $\operatorname{Re} \frac{2+7i}{1+4i}$.

7. Найдите все комплексные числа z такие, что $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = |z|$.

8. Используя алгебраическую форму комплексного числа, докажите утверждения о комплексно сопряжённых числах:
а) $z = \overline{(\overline{z})}$; б) $|z| = |\overline{z}|$; в) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
г) $z = -\overline{z} \Leftrightarrow iz \in \mathbb{R}$; д) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; е) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

9. Докажите тождество: $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

10. Решите системы:
а) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1+i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2-3i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases}$

11. Найдите все комплексные числа z такие, что $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ и $\left|\frac{z-8}{z-4}\right| = 1$.

У к а з а н и е: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

§ 2. Изображение комплексных чисел на координатной плоскости

Рассмотрим комплексное число $z = x+iy$. На декартовой координатной плоскости Oxy отметим точку с координатами $(x; y)$, радиус-вектор которой также обозначим через z (рис. 1, *а*). Длина этого радиус-вектора, очевидно, равна $\sqrt{x^2+y^2} = |z|$.

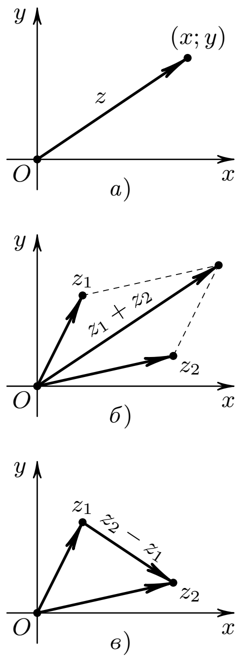

Рис. 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*; ось Ox называется *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*.

П р и м е ч а н и е. Поскольку имеет место взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками комплексной плоскости, то будем иногда отождествлять точки и числа там, где это не приведёт к недоразумению. Например, вместо «точки, соответствующие числам z_1, z_2 и z_3, лежат на одной прямой», будем просто писать «точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой», и т. п.

Из определений суммы и разности следует, что комплексные числа складываются и вычитаются, как векторы. Векторная интерпретация суммы и разности комплексных чисел показана на рис. 1, *б*, *в*. Так, например, геометрический смысл суммы комплексных чисел z_1 и z_2 — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$.

Рассмотрим треугольник (возможно, вырожденный), вершины которого соответствуют числам 0, z_1 и z_1+z_2, а стороны, таким образом, равны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1+z_2|$. Применив к нему неравенство треугольника, известное из курса геометрии (или следствие из него, учитывающее случай, когда три точки лежат на одной прямой), получим *неравенство треугольника* для комплексных чисел:

$$|z_1|+|z_2|\leqslant|z_1+z_2|.$$

Это неравенство допускает и полностью алгебраическое доказательство; приведём его.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $z_2=0$, то справедливость неравенства очевидна. Рассмотрим далее случай $z_2\neq 0$. По свойству модуля выполнены равенства

$$|z_1+1|^2=(z_1+1)\cdot(\overline{z_1}+1)=|z_1|^2+z_1+\overline{z_1}+1.$$

Если $z_1=x_1+iy_1$, то $z_1+\overline{z_1}=2x_1\leqslant 2\sqrt{x_1^2+y_1^2}=2|z_1|$ и $|z_1+1|^2\leqslant|z_1|^2+{}$ $+2|z_1|+1=(|z_1|+1)^2$, или $|z_1+1|\leqslant|z_1|+1$. Рассмотрим модуль суммы:

$$|z_1+z_2|=\left|z_2\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}+1\right)\right|=|z_2|\cdot\left|\frac{z_1}{z_2}+1\right|\leqslant|z_2|\cdot\left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+1\right)=|z_1|+|z_2|,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что равенство может достигаться только в том случае, когда точки z_1, z_2 и 0 лежат на одной прямой.

С л е д с т в и е. Так как $z_1=-z_2+(z_1+z_2)$ и $|z_2|=|-z_2|$, то в силу неравенства треугольника имеем следующие неравенства:

$$|z_1|\leqslant|-z_2|+|z_1+z_2|=|z_2|+|z_1+z_2|\quad\Leftrightarrow\quad|z_1+z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|.$$

Аналогично, $|z_1+z_2|\geqslant|z_2|-|z_1|$; следовательно, $|z_1+z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$. Покажите самостоятельно, что и $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

12. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, задаваемых условием $|z-2i+1|\leqslant 5$.

Р е ш е н и е. Условие задачи равносильно следующему: найти все точки z, удалённые от точки $2i-1$ на расстояние, не большее 5. Искомым множеством является круг радиуса 5 с центром в точке $2i-1$ (рис. 2).

О т в е т: см. рис. 2.

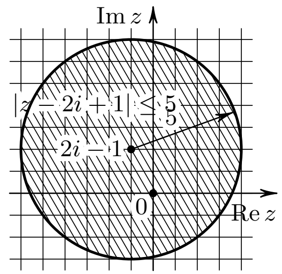

Рис. 2

Тригонометрической формой записи комплексного числа $z\neq 0$ называется запись вида

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

угол φ, определяемый равенствами $\cos\varphi=\dfrac{x}{|z|}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{|z|}$, или $x=|z|\cdot\cos\varphi$, $y=|z|\cdot\sin\varphi$ (рис. 3), называется *аргументом* числа z (такой угол всегда существует, поскольку $\left(\dfrac{x}{|z|}\right)^2+\left(\dfrac{y}{|z|}\right)^2=$ $=\dfrac{x^2+y^2}{|z|^2}=\dfrac{|z|^2}{|z|^2}=1$). Аргумент комплексного числа 0 не определён.

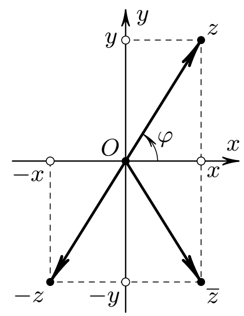

Рис. 3

Все возможные значения аргумента комплексного числа $z\neq 0$ даются формулой $\varphi'=\varphi+{}$ $+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Любые два значения аргумента отличаются на целое кратное 2π; иначе говоря, частное $\dfrac{\varphi'-\varphi}{2\pi}$ есть целое число. В том случае, когда необходимо получить однозначно определённое значение аргумента, берут его *главное значение*, лежащее между числами $-\pi$ и π, которое обозначают через $\arg(z)$, или $\arg z$ (где $-\pi < \arg z \leqslant \pi$). Произвольное (не обязательно главное) значение аргумента обозначается через $\operatorname{Arg}(z)$ или $\operatorname{Arg} z$.

Для вычисления $\arg z$, где $z = x + iy$, используют соотношения

$$
\begin{array}{ll}
\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{при } x > 0; \\
\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{при } x < 0,\ y \geqslant 0; \\
\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & \text{при } x < 0,\ y < 0; \\
\arg z = \dfrac{\pi}{2} & \text{при } x = 0,\ y > 0; \\
\arg z = -\dfrac{\pi}{2} & \text{при } x = 0,\ y < 0.
\end{array}
$$

В частности, из первой и второй формул следует, что если $x > 0$, то $\arg x = 0$, а если $x < 0$, то $\arg x = \pi$.

Отметим, что $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $|z_1| = |z_2|$, $\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ ($z_1,\ z_2 \neq 0$). Если же формулировать критерий равенства, используя главное значение аргумента, то он запишется так:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \arg z_1 = \arg z_2. \end{cases}$$

Приведём примеры записи комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0), \quad -1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi);$$

$$i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right), \quad -i = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right);$$

$$\overline{z} = |z| \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi) = |z| \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

Из последнего примера следует, что аргументы комплексно сопряжённых чисел отличаются знаком (за исключением случая $\arg z = \pi$, когда и $\arg \overline{z} = \pi$).

Формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеют вид

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = \\ = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{|z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2} = \\ = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

(убедитесь в справедливости приведённых равенств самостоятельно, проделав соответствующие тригонометрические преобразования).

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Из равенства $\operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$ следует, что угол между векторами z_1 и z_2, отсчитываемый от z_2 к z_1 против часовой стрелки, равен $\operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2}$ (рис. 4).

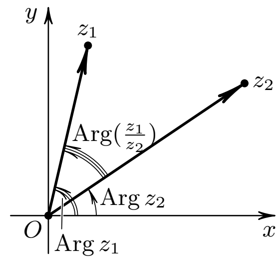

Рис. 4

13. Представьте в тригонометрической форме число $z = \sqrt{3}i - 1$.

Р е ш е н и е. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Тогда

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

О т в е т: $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

О п р е д е л е н и е. *Двойным отношением* четырёх различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 называется комплексное число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$.

П р и м е ч а н и е. Порядок точек при вычислении двойного отношения важен; например, двойное отношение точек z_1, z_2, z_3, z_4 (равное $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$), вообще говоря, не равно двойному отношению точек z_2, z_1, z_3, z_4 (равному $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} : \dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$).

14. Даны четыре различных точки z_1, z_2, z_3, z_4, лежащих на одной окружности. Докажите, что их двойное отношение является действительным числом.

Р е ш е н и е. Положим

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \rho(\cos\psi + i \sin\psi).$$

Изобразим точки z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости. Числу $z_1 - z_3$ соответствует вектор $\overrightarrow{z_3 z_1}$, а числу $z_2 - z_3$ — вектор $\overrightarrow{z_3 z_2}$, поэтому φ есть угол

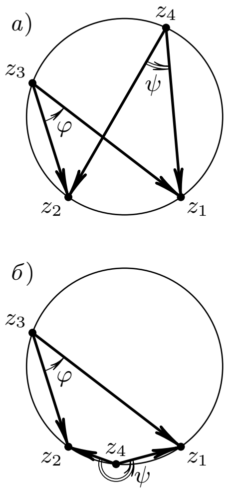

Рис. 5

между векторами $\overrightarrow{z_3z_2}$ и $\overrightarrow{z_3z_1}$, отсчитываемый от $\overrightarrow{z_3z_2}$ к $\overrightarrow{z_3z_1}$. Аналогично, ψ есть угол между векторами $\overrightarrow{z_4z_2}$ и $\overrightarrow{z_4z_1}$, отсчитываемый от $\overrightarrow{z_4z_2}$ к $\overrightarrow{z_4z_1}$ (рис. 5). Поскольку φ и ψ вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу $\smile z_2z_1$, то либо $\psi=\varphi$ (рис. 5, *а*), либо $\psi=\varphi\pm\pi$ (случай $\psi=\varphi+\pi$ изображён на рис. 5, *б*). Тогда, соответственно,

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi+i\sin\psi)}=$$
$$=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{r}{\rho}\in\mathbb{R},$$

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi+i\sin\psi)}=$$
$$=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(-\cos\varphi-i\sin\varphi)}=-\frac{r}{\rho}\in\mathbb{R},$$

что и требовалось доказать.

15. Даны четыре различных точки z_1, z_2, z_3, z_4, лежащих на одной прямой. Докажите, что их двойное отношение является действительным числом.

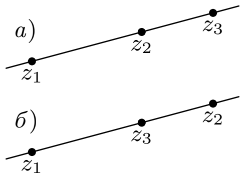

Рис. 6

Р е ш е н и е. Поскольку точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой, то либо

$$\operatorname{Arg}(z_1-z_3)=\operatorname{Arg}(z_2-z_3)$$

(рис. 6, *а*), либо

$$\operatorname{Arg}(z_1-z_3)=\operatorname{Arg}(z_2-z_3)+\pi$$

(рис. 6, *б*). Запишем равенство

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\operatorname{Arg}(z_1-z_3)-\operatorname{Arg}(z_2-z_3).$$

Выражение в правой части равно либо 0, либо π; в любом из этих случаев $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\in\mathbb{R}$. Аналогично $\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\in\mathbb{R}$, а тогда и $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\in\mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

16. Даны четыре различных точки z_1, z_2, z_3, z_4. Докажите, что если их двойное отношение является действительным числом, то эти точки лежат либо на одной прямой, либо на одной окружности.

Решите эту задачу самостоятельно, проведя рассуждения, подобные использованным при решении задач 14 и 15.

Утверждения задач 14—16 можно объединить в одно; сформулируем его в виде теоремы.

Т е о р е м а. Двойное отношение четырёх различных точек является действительным числом тогда и только тогда, когда эти точки лежат на одной прямой или на одной окружности.

У п р а ж н е н и я

17. Представьте в тригонометрической форме числа:

а) $2-2i$; б) $\sin\frac{\pi}{9}-i\cos\frac{\pi}{9}$; в) $1-i\operatorname{tg}25°$;

г) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha<2\pi)$.

18. Выполните действия с числами, предварительно представив их в тригонометрической форме:

а) $(1+i)(1-\sqrt{3}i)$; б) $\frac{3i}{i-1}$; в) $\frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)}{(1+i)(\sqrt{3}+i)}$.

19. Найдите $\arg\frac{5-i}{2-3i}$.

20. Известно, что $\operatorname{tg}\arg z_1=2$, $\operatorname{tg}\arg z_2=3$. Чему равен $\arg(z_1z_2)$?

21. Найдите $\cos 15°$ и $\sin 15°$, используя тригонометрическую форму записи комплексного числа.

У к а з а н и е. $15°=45°-30°$.

22. Определите угол между радиус-векторами комплексных чисел $a+bi$ и $-b+ai$, где a, b — положительные действительные числа.

23. Изобразите на координатной плоскости множества точек z, задаваемые условиями:

а) $|z|=3$; б) $\operatorname{Re}z>\operatorname{Im}z$; в) $\operatorname{Re}(2z+1)=3$;

г) $|z|=|z+4i|$; д) $\arg(1-z)=3\pi/4$; е) $\arg\overline{z}=\pi/4$;

ж) $\left|\frac{z-2i}{z+4}\right|\geqslant 1$; з) $\frac{|z-1|}{|z+1|}=2$; и) $|z-2|=\operatorname{Re}z+2$.

24. Найдите двойное отношение точек:

а) $1+i$, $3+2i$, 0, i; б) $2+6i$, $-2+4i$, $-1-3i$, $5+5i$.

25. Известно, что $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0$ и $|z_1+z_2+z_3|=0$. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3 образуют равносторонний треугольник.

§ 3. Формула Муавра

Из формул умножения и деления можно вывести общее правило возведения комплексных чисел в целую степень, называемое *формулой Муавра*[1].

Положим по определению $z^0=1$ (при $z\neq 0$). При $n\in\mathbb{N}$ имеем:

$$z^n=|z|^n\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=|z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\quad z\neq 0$$

(это очевидно следует из формулы (1) умножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме).

Полагая $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$, выведем аналогичную формулу для целого числа $m=-n<0$ $(n\in\mathbb{N})$, а именно:

$$z^m=z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\frac{1}{|z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}=\frac{1}{|z|^n}\cdot\frac{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi}=$$

$$=|z|^{-n}\cdot(\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi))=|z|^m\cdot(\cos m\varphi+i\sin m\varphi),\quad z\neq 0.$$

Отсюда следует истинность формулы Муавра

$$z^m=|z|^m\cdot(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)$$

для всех $m\in\mathbb{Z}$ (при $z\neq 0$).

26. Вычислите $(1+i)^8$.

Решение. $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; следовательно, $(1+i)^8=(\sqrt{2})^8\left(\cos 8\frac{\pi}{4}+i\sin 8\frac{\pi}{4}\right)=16(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16.$

Ответ: 16.

Упражнения

27. Используя формулу Муавра, найдите все такие комплексные числа z, что $z^2=i$.

Указание. Запишите z в тригонометрической форме, возведите в квадрат при помощи формулы Муавра и, приравняв полученное выражение к $i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, найдите возможные значения модуля и аргумента z.

28. Вычислите z^{21}, где z равно а) $1+i$; б) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$; в) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

[1] А. де Муавр (1667—1754) — английский математик.

29. Вычислите: а) $|(1-i)^6+3i|$; б) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^9}{(1-i)^7}$.

30. Найдите все числа z такие, что $\overline{z}=z^3$.

31. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $(1+i)^n=(1-i)^n$.

32. Докажите, что $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

33. Пользуясь формулой Муавра, выразите через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ тригонометрические функции кратных углов:
а) $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$; б) $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$; в) $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$.

§ 4. Извлечение корней из комплексных чисел

Определение. *Корнем n-й степени* из комплексного числа w называется комплексное число z такое, что $z^n=w$. Множество всех корней n-й степени из w обозначается через $\sqrt[n]{w}$.

Теорема. Уравнение $z^n=w$, где $w\in\mathbb{C}$, $w\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, имеет ровно n различных комплексных корней.

Доказательство. Пусть $w=|w|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$; число z будем искать в виде

$$z=|z|\cdot(\cos\zeta+i\sin\zeta).$$

Преобразуем уравнение $z^n=w$, используя формулу Муавра:

$$|z|^n\cdot(\cos n\zeta+i\sin n\zeta)=|w|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Отсюда вытекают равенства

$$|z|^n=|w|,\qquad n\zeta=\theta+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z},$$

из которых для модуля искомого корня получается определённое значение $|z|=\sqrt[n]{|w|}$, тогда как его аргумент $\zeta=\dfrac{\theta+2\pi k}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$, может принимать различные значения при разных k. При этом значениям $k=0$, 1, 2, …, $n-1$ соответствуют различные значения корня, а при $k=n$ значение корня совпадает с его значением при $k=0$. При $k=n+1$ получим то же значение корня, что и при $k=1$, и т. д.

Таким образом, число различных значений корня равно n — это

$$z_k=\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0$, 1, 2, …, $n-1$, что и требовалось доказать.

Все n корней z_k лежат на окружности радиусом $\sqrt[n]{|w|}$ с центром в начале координат; они делят окружность на n дуг величиной $\frac{2\pi}{n}$ каждая и являются вершинами вписанного в неё правильного n-угольника.

34. Найдите все корни n-й степени из действительного числа $x>0$.

Решение. Если x — положительное действительное число, то $|x| = x$, $\theta = \arg x = 0$. Формула корней в этом случае даёт ответ:

$$z_k = \sqrt[n]{x} \cdot \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}\right), \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

При $k=0$ получим $z_0 = \sqrt[n]{x}$ — это арифметический корень. При чётном $n=2m$ имеется ещё один действительный корень, получающийся при $k=m$ ($\zeta = \arg z_m = \pi$):

$$z_m = \sqrt[n]{x} \cdot \left(\cos \frac{2\pi m}{2m} + i \sin \frac{2\pi m}{2m}\right) = -\sqrt[n]{x}.$$

Корни n-й степени из 1 часто обозначают через ε_k, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n-1$. Согласно задаче 34, $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$.

35. Вычислите корни третьей степени из комплексного числа $2+2i$.

Решение. Найдём тригонометрическую форму данного числа:

$$2+2i = \sqrt{8} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле для корней из комплексного числа имеем:

$$\sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \cdot (\cos \frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}) = \\ = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k\right)\right),$$

где k пробегает значения 0, 1, 2. Запишем полученные корни:

$$\alpha_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right),$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}\right).$$

Используя формулы для косинуса и синуса разности углов, получаем:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -1+i, -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}$.

Немного иначе извлекают корни из комплексных чисел, аргумент которых не приводится к виду $\frac{m\pi}{n}$, где $m,\ n \in \mathbb{Z}$.

36. Найдите $\sqrt{3+4i}$.

Решение. Пусть $w=3+4i$. Положим $\varphi = \arg w$. Очевидно, $|w| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; тогда $w = 5(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Следовательно, $z = \sqrt{w} = \sqrt{5}\left(\cos \frac{\varphi+2\pi k}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right)$, где $k=0,\ 1$. Запишем подробнее:

$$z_1 = \sqrt{5}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right) = -z_1.$$

Найдём $\cos \frac{\varphi}{2}$ и $\sin \frac{\varphi}{2}$, используя формулу двойного угла: $2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = \cos\varphi = \frac{3}{5}$, откуда $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{5}$, $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{5}$; тогда $\cos \frac{\varphi}{2} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin \frac{\varphi}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Угол φ лежит в первой четверти (почему?), а следовательно, и угол $\frac{\varphi}{2}$ тоже, поэтому $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$, $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$. Тогда

$$z_1 = \sqrt{5}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} + i\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 2+i, z_2 \quad = -z_1 = -2-i.$$

Ответ: $\pm(2+i)$.

37. Вычислите сумму l-х степеней корней n-й степени из 1, где $l,\ n \in \mathbb{N}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\sqrt[n]{1}=\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Несложно заметить, что $\varepsilon_2=\varepsilon_1^2$, $\varepsilon_3=\varepsilon_1^3$, …, $\varepsilon_{n-1}=\varepsilon_1^{n-1}$. Тогда искомая сумма равна

$$S_l=\varepsilon_0^l+\varepsilon_1^l+\varepsilon_2^l+\ldots+\varepsilon_{n-1}^l=1+\varepsilon_1^l+(\varepsilon_1^2)^l+(\varepsilon_1^3)^l+\ldots+(\varepsilon_1^{n-1})^l=$$
$$=1+\varepsilon_1^l+(\varepsilon_1^l)^2+(\varepsilon_1^l)^3+\ldots+(\varepsilon_1^l)^{n-1}.$$

Как видим, требуется найти сумму первых n членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен ε_1^l. Рассмотрим два случая.

1) $\varepsilon_1^l\neq 1$. Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии (которая верна и для комплексных чисел!)

$$S_l=\frac{(\varepsilon_1^l)^n-1}{\varepsilon_1^l-1}=\frac{\varepsilon_1^{ln}-1}{\varepsilon_1^l-1}=\frac{\cos\frac{2\pi ln}{n}+i\sin\frac{2\pi ln}{n}-1}{\cos\frac{2\pi l}{n}+i\sin\frac{2\pi l}{n}-1}=\frac{(\cos 2\pi l-1)+i\sin 2\pi l}{\left(\cos\frac{2\pi l}{n}-1\right)+i\sin\frac{2\pi l}{n}}=0,$$

так как $\cos 2\pi l=1$, $\sin 2\pi l=0$ при $l\in\mathbb{N}$ (знаменатель дроби равен ε_1^l-1, а потому отличен от нуля).

2) $\varepsilon_1^l=1$. Тогда $S_l=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ раз}}=n$.

Заметим, что $\varepsilon_1^l=1$ тогда и только тогда, когда $l\,\vdots\,n$ (докажите это самостоятельно, используя равенство $\varepsilon_1^l=\cos\dfrac{2\pi l}{n}+i\sin\dfrac{2\pi l}{n}$).

Таким образом, получаем окончательный ответ к задаче.

О т в е т: n, когда $l\,\vdots\,n$; 0, когда $l\not\vdots\,n$.

З а м е ч а н и е. Несложно показать, что все значения корня n-й степени из комплексного числа z можно получить умножением о д н о г о и з з н а ч е н и й корня на все корни n-й степени из 1. Например, $z_k=z_0\cdot\varepsilon_k$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n-1$). В частности, $\sqrt[3]{1}$ принимает значения $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=-\dfrac12+i\dfrac{\sqrt3}{2}$, $\varepsilon_2=-\dfrac12-i\dfrac{\sqrt3}{2}$ (проверьте это самостоятельно); тогда, например, $\sqrt[3]{-8}$ принимает значения $\{-2\varepsilon_0;-2\varepsilon_1;-2\varepsilon_2\}=\{-2;1-i\sqrt3;1+i\sqrt3\}$.

38. Докажите, что при $z\neq\pm1$ комплексное число $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z|=1$.

Р е ш е н и е 1. Докажем д о с т а т о ч н о с т ь: если $|z|=1$, $z\neq\pm1$, то число $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ — чисто мнимое.

В самом деле, если $|z|=1$, то $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$. Вычисляя $w=\dfrac{z-1}{z+1}$, получим:

$$w=\frac{\cos\alpha-1+i\sin\alpha}{\cos\alpha+1+i\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha-1+i\sin\alpha}{\cos\alpha+1+i\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+1-i\sin\alpha}{\cos\alpha+1-i\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\cos^2\alpha-(1-i\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+1)^2+\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-2i\sin\alpha-\sin^2\alpha)}{(\cos^2\alpha+2\cos\alpha+1)+\sin^2\alpha}=$$
$$=\frac{2i\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)}=\frac{2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

($\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ определён и не равен нулю, поскольку $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, что следует из условия $z\neq\pm1$).

2. Докажем н е о б х о д и м о с т ь: если $w=\dfrac{z-1}{z+1}=it$ ($t\in\mathbb{R}$, $t\neq0$, $z\neq\pm1$), то $|z|=1$.

Пусть $z=x+iy$; докажем, что $x^2+y^2=1$. Запишем цепочку преобразований, справедливых при $z\neq-1$, $t\neq0$:

$$\frac{z-1}{z+1}=it\ \Leftrightarrow\ x-1+iy=it(x+1+iy)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x-1=-ty,\\ y=t(x+1)\end{cases}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ t(x^2-1)=-ty^2\ \Leftrightarrow\ t(x^2+y^2)=t\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2=1.$$

Утверждение задачи доказано полностью.

П р и м е ч а н и е. Утверждение задачи 38 допускает наглядное геометрическое истолкование. Числа $z-1$ и $z+1$ соответствуют векторам, соединяющим точки 1 и -1 комплексной плоскости с точкой z (напомним, что $z\neq\pm1$), рис. 7. Число $\arg w=\arg\dfrac{z-1}{z+1}$ равно углу между этими векторами. Поэтому w — чисто мнимое число тогда и только тогда, когда рассмотренные векторы перпендикулярны. По теореме о вписанном угле это равносильно тому, что z лежит на окружности, построенной на отрезке, соединяющем точки 1 и -1, как на диаметре (в данном случае — на единичной окружности с центром в начале координат), т. е. условию $|z|=1$.

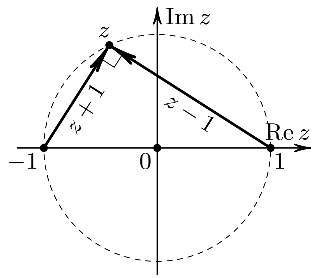

Рис. 7

Обсудим теперь вопрос о том, как решаются квадратные уравнения в комплексных числах. Рассмотрим уравнение $az^2+bz+c=0$, где $a\neq 0$, b, c — произвольные комплексные коэффициенты. Проведём выкладки, во многом аналогичные тем, при помощи которых выводится формула корней квадратного уравнения в действительном случае:

$$az^2+bz+c=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2+2\frac{b}{2a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

В правой части равенства стоит некоторое комплексное число; по определению корня (с. 15) $z+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, или $z+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (отметим, что, в отличие от действительного случая, нет необходимости ставить знак «$\pm$» перед корнем, поскольку в комплексном случае знаком $\sqrt{\ }$ обозначается множество в с е х корней из числа).

Перенося второе слагаемое в левой части вправо, получим формулу

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(отличие от формулы для действительного случая, известной вам из курса алгебры, состоит лишь в том, что вместо знака «$\pm$» перед корнем стоит «+»; причина этого пояснена выше). Таким образом, квадратное уравнение всегда имеет два комплексных корня (возможно, совпадающих). Вообще, из основной теоремы алгебры, упомянутой во введении, следует, что любое уравнение n-й степени от одной переменной имеет с учётом кратности ровно n корней (фраза «с учётом кратности» означает, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность).

39. Решите квадратное уравнение $z^2+2z+5=0$.

Р е ш е н и е. Дискриминант данного уравнения равен $2^2-4\cdot 1\cdot 5=$ $=-16$; тогда $z=\frac{-2+\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$.

О т в е т: $-1\pm 2i$.

Заметим, что корни рассмотренного в задаче 39 уравнения являются комплексно сопряжёнными числами. Это не случайность: так будет всегда, если коэффициенты уравнения действительны. В самом деле: если a, b, $c\in\mathbb{R}$, то $D=b^2-4ac\in\mathbb{R}$, а тогда $\sqrt{D}$ является либо действительным числом (если $D\geqslant 0$), либо, как в рассмотренном примере, чисто мнимым: $\sqrt{D}=\pm it$, $t\in\mathbb{R}$ (если $D<0$). В первом случае оба корня будут действительны, а во втором числа $\frac{-b+it}{2a}$ и $\frac{-b-it}{2a}$ являются комплексно сопряжёнными.

Если же не все коэффициенты квадратного уравнения являются действительными, то его корни, вообще говоря, уже не будут комплексно сопряжёнными числами.

40. Приведите пример квадратного уравнения, имеющего корни $1-3i$ и $-2+i$.

Р е ш е н и е. Таким уравнением является, например, $(z-1+3i)\times$ $\times(z+2-i)=0$. Раскрывая скобки, получаем: $z^2+(1+2i)z+(1+7i)=0$.

О т в е т: $z^2+(1+2i)z+(1+7i)=0$.

С комплексными числами тесно связано и решение уравнений третьей и четвёртой степеней (как было сказано во введении, комплексные числа и появились в связи с попытками получить формулу корней кубического уравнения), однако мы не будем останавливаться на этом вопросе.

Отметим, что для уравнений и многочленов относительно комплексных чисел имеют место многие утверждения, с которыми вы познакомились, изучая действительные числа. Так, например, справедливыми и в комплексном случае оказываются теоремы Безу и Виета. А вот с разложением на множители полной аналогии не наблюдается: по основной теореме алгебры любой многочлен степени выше первой имеет комплексный корень, а значит, может быть разложен на множители (по теореме Безу). Над множеством же действительных чисел, как вы знаете, существуют неприводимые многочлены и второй степени.

У п р а ж н е н и я

41. Найдите все значения корней:

а) $\sqrt[4]{-64}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{5+12i}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

42. Изобразите на координатной плоскости множество всех значений $\sqrt[8]{256}$.

43. Найдите произведение всех корней 2008-й степени из i.

44. Найдите суммы

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha,$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha.$$

45. Решите уравнения:
а) $z^2+4=0$; б) $z^2+5z+4+10i=0$; в) $iz^2+(1-2i)z-(7+i)=0$.

46. Укажите все значения комплексного параметра a, при которых модуль суммы корней квадратного уравнения $az^2+(4-3i)z-2i+1=0$ больше или равен 5.

§ 5. Уравнение прямой и окружности в комплексной плоскости

Теорема. Если $c\in\mathbb{C}$, α, $\beta\in\mathbb{R}$ и $|c|^2-\alpha\beta>0$, то уравнение

$$\alpha\cdot z\cdot\overline{z}+(\overline{c}\cdot z+c\cdot\overline{z})+\beta=0 \tag{2}$$

при $\alpha\neq 0$ определяет окружность на плоскости $\mathbb{C}$, а при $\alpha=0$ — прямую.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) $\alpha=0$. В этом случае уравнение (2) примет вид $\overline{c}\cdot z+c\cdot\overline{z}+\beta=0$. Пусть $c=a+bi$, $z=x+iy$; тогда $\overline{c}\cdot z+c\cdot\overline{z}=(a-ib)(x+iy)+(a+ib)\times\times(x-iy)=2(ax+by)$, и уравнение (2) принимает известный вид общего уравнения прямой: $ax+by+\dfrac{\beta}{2}=0$.

2) $\alpha\neq 0$. Заметим, что окружность радиуса R с центром в точке z_0 задаётся равенством $|z-z_0|=R$. Преобразуем это равенство:

$$|z-z_0|=R \quad\Leftrightarrow\quad |z-z_0|^2=R^2 \quad\Leftrightarrow\quad (z-z_0)\cdot(\overline{z}-\overline{z_0})=R^2.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$z\cdot\overline{z}-(\overline{z_0}\cdot z+z_0\cdot\overline{z})+z_0\cdot\overline{z_0}-R^2=0. \tag{2$'$}$$

Разделив (2) на $\alpha\neq 0$ и сделав замену $z_0=-\dfrac{c}{\alpha}$, $R=\sqrt{z_0\cdot\overline{z_0}-\dfrac{\beta}{\alpha}}$, получим в точности уравнение окружности (2$'$) (проведите соответствующие выкладки). Отметим, что приведённая замена всегда возможна, поскольку по условию $z_0\cdot\overline{z_0}-\dfrac{\beta}{\alpha}=|z_0|^2-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|c|^2}{\alpha^2}-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|c|^2-\alpha\beta}{\alpha^2}>0$.

Теорема доказана.

47. Задайте прямую $y=3x-2$ уравнением прямой в комплексной плоскости.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $3x-y-2=0$. При доказательстве теоремы было получено равенство $(a-ib)(x+iy)+$ $+(a+ib)(x-iy)=2(ax+by)$; подставляя в него $a=3$, $b=-1$, получим:

$2(3x-y)=(3+i)z+(3-i)\overline{z}$, где $z=x+iy$. Тогда уравнение запишется в виде $(\overline{3-i})z+(3-i)\overline{z}-4=0$.

Ответ: $(\overline{3-i})z+(3-i)\overline{z}-4=0$.

Упражнения

48. Составьте в комплексных координатах уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент 1 и проходящей через а) начало координат; б) точку $(2;-1)$.

49. Найдите угол наклона прямой $(1+\sqrt{3}i)z+(1-\sqrt{3}i)\overline{z}-3=0$ к действительной оси.

50. Запишите в виде (2) уравнение окружности: а) радиуса 3 с центром в точке $1+i$; б) с центром в точке $(3,0)$, проходящей через точку $(6,-4)$.

§ 6. Преобразование инверсии

Поставим в соответствие произвольному комплексному числу $z\neq 0$ число $w(z)=\dfrac{1}{\overline{z}}$. Представим z в тригонометрической форме: $z=|z|\times\times(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда $\overline{z}=|z|\cdot(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$, откуда

$$w(z)=\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{|z|}(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Таким образом, $|w|=\dfrac{1}{|z|}$, $\arg w=\arg z$.

Легко понять, как изобразить рассмотренное соответствие на комплексной плоскости. Если точка Z соответствует комплексному числу $z\neq 0$, то точка W, соответствующая числу $w=\dfrac{1}{\overline{z}}$, будет лежать на луче OZ, и при этом $OW=\dfrac{1}{OZ}$.

Преобразование плоскости, при котором каждая точка Z (кроме начала координат) переходит в точку W, построенную указанным выше образом, называется *инверсией* относительно единичной окружности с центром в начале координат.

Примечание. Аналогичным образом определяется инверсия относительно произвольной окружности: это преобразование плоскости, при котором образ W произвольной точки Z, отличной от центра окружности, лежит на луче OZ, а его положение на луче определяется равенством $OZ\cdot OW=R^2$, где O — центр окружности, а R — её радиус.

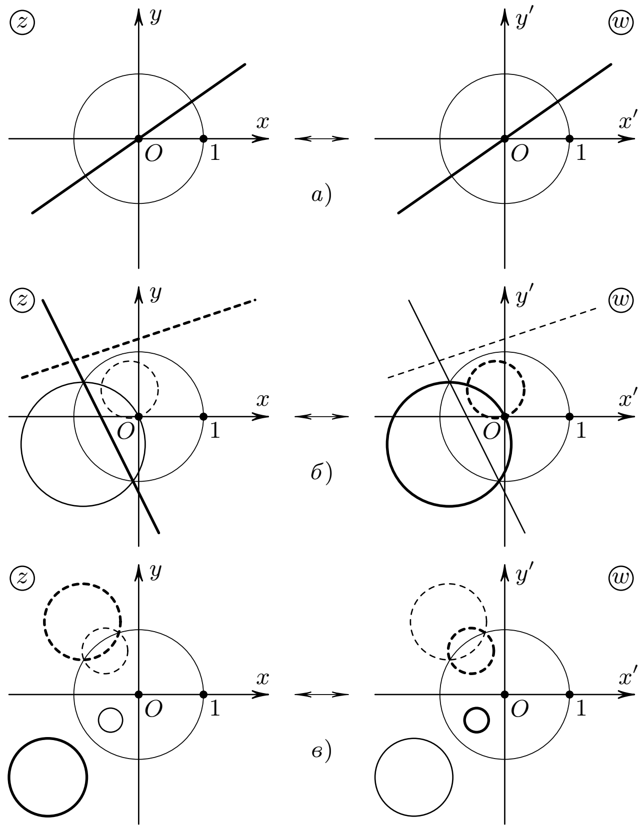

Рис. 8

Очевидно, при инверсии точки, лежащие внутри окружности, переходят в точки, лежащие вне этой окружности, и наоборот; точки, лежащие на окружности, переходят сами в себя. Исключение составляет центр окружности, который никуда не переходит.

Т е о р е м а. При преобразовании инверсии любая прямая или окружность переходит в прямую или окружность. При этом

1) прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется сама в себя (за исключением центра инверсии), рис. 8, *а*;

2) прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии, и обратно, рис. 8, *б*;

3) окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, не проходящую через центр инверсии, рис. 8, *в*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Общее уравнение для прямых и окружностей на комплексной плоскости (z) имеет вид (2):

$$\alpha \cdot z \cdot \overline{z} + (\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z}) + \beta = 0.$$

Воспользуемся преобразованием инверсии:

$$w = \frac{1}{\overline{z}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{\overline{w}}.$$

Подставив $z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ в уравнение (2), получим уравнение

$$\alpha \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} + \left(\overline{c} \cdot \frac{1}{\overline{w}} + c \cdot \frac{1}{w}\right) + \beta = 0. \tag{3}$$

Домножим обе части (3) на $w \cdot \overline{w}$ и получим уравнение

$$\alpha + (\overline{c} \cdot w + c \cdot \overline{w}) + \beta \cdot w \cdot \overline{w} = 0.$$

Введём для удобства новые обозначения $\alpha' = \beta$, $\beta' = \alpha$, $c' = c$. Уравнение примет вид

$$\alpha' \cdot w \cdot \overline{w} + (\overline{c'} \cdot w + c' \cdot \overline{w}) + \beta' = 0, \tag{3'}$$

при этом выполнено неравенство $|c'|^2 - \alpha'\beta' = |c|^2 - \alpha\beta > 0$. По теореме из § 5 геометрическим местом точек, удовлетворяющих уравнению $(3')$, является прямая или окружность.

Рассмотрим различные случаи 1)—3), перечисленные в теореме.

1) Общее уравнение прямой p, проходящей через точку O (рис. 8, *а*), имеет вид $\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z} = 0$; здесь $\alpha = 0$, $\beta = 0$, откуда и $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ ($\alpha = 0$ по теореме из § 5; $\beta = 0$, поскольку прямая проходит через начало координат). Образом прямой p является прямая p', точки которой удовлетворяют тому же самому уравнению $\overline{c} \cdot w + c \cdot \overline{w} = 0$, откуда следует истинность утверждения.

2) Общее уравнение прямой p, не проходящей через точку O (рис. 8, *б*), имеет вид $\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z} + \beta = 0$, при этом $\alpha = \beta' = 0$, $\beta = \alpha' \neq 0$. Образом прямой p будет геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$\alpha' \cdot w \cdot \overline{w} + (\overline{c'} \cdot w + c' \cdot \overline{w}) = 0,$$

описывающему окружность, проходящую (поскольку $\beta' = 0$) через центр инверсии. Отсюда вытекает истинность доказываемого утверждения.

3) Окружность, не проходящая через начало координат (рис. 8, *в*), имеет уравнение

$$\alpha \cdot z \cdot \overline{z} + (\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z}) + \beta = 0,$$

в котором $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, а тогда и $\alpha' \neq 0$, $\beta' \neq 0$. При таких значениях параметров уравнение (3′) также задаёт окружность, не проходящую через центр инверсии.

Теорема доказана.

Отметим, что приведённая теорема допускает и иное доказательство, использующее двойное отношение точек, которое сохраняется при инверсии (см. задачу 53).

Упражнения

51. При инверсии относительно окружности радиуса 1 с центром в начале координат окружность $|z-i|=3$ перешла в другую окружность. Запишите уравнение новой окружности и найдите её центр.

Примечание. Центр новой окружности, вообще говоря, не является образом центра исходной окружности!

52. Докажите, что преобразование инверсии относительно окружности радиуса R с центром в точке z_0 описывается соотношением $w = z_0 + \dfrac{R^2}{\overline{z - z_0}}$.

53. Докажите, что преобразование инверсии заменяет двойное отношение точек на комплексно сопряжённое.

§ 7. Круговые отображения комплексной плоскости

Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — произвольная точка комплексной плоскости.

1. Преобразование *инверсии* относительно окружности радиуса R с центром в точке z_0 описывается уравнением $w = z_0 + \dfrac{R^2}{\overline{z - z_0}}$, рис. 9, *а*.

2. Преобразование комплексной плоскости $w = z + a$, где a — комплексное число, называется *параллельным переносом* на вектор $\overrightarrow{a}$ (комплексное число a), рис. 9, *б*.

3. Преобразование комплексной плоскости $w = kz$, где $k > 0$, называется *гомотетией* с центром O и коэффициентом k, рис. 9, *в*.

4. Преобразование комплексной плоскости $w = e_\alpha \cdot z$, где $e_\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$, называется *поворотом* вокруг центра O на угол α: $w = e_\alpha \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha))$, рис. 9, *г*.

5. Преобразование комплексной плоскости $w = a \cdot z$, где $a = |a| \times (\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$, соответствует композиции гомотетии с коэффициентом $k = |a| > 0$ и поворота на угол α вокруг центра O, рис. 9, *д*.

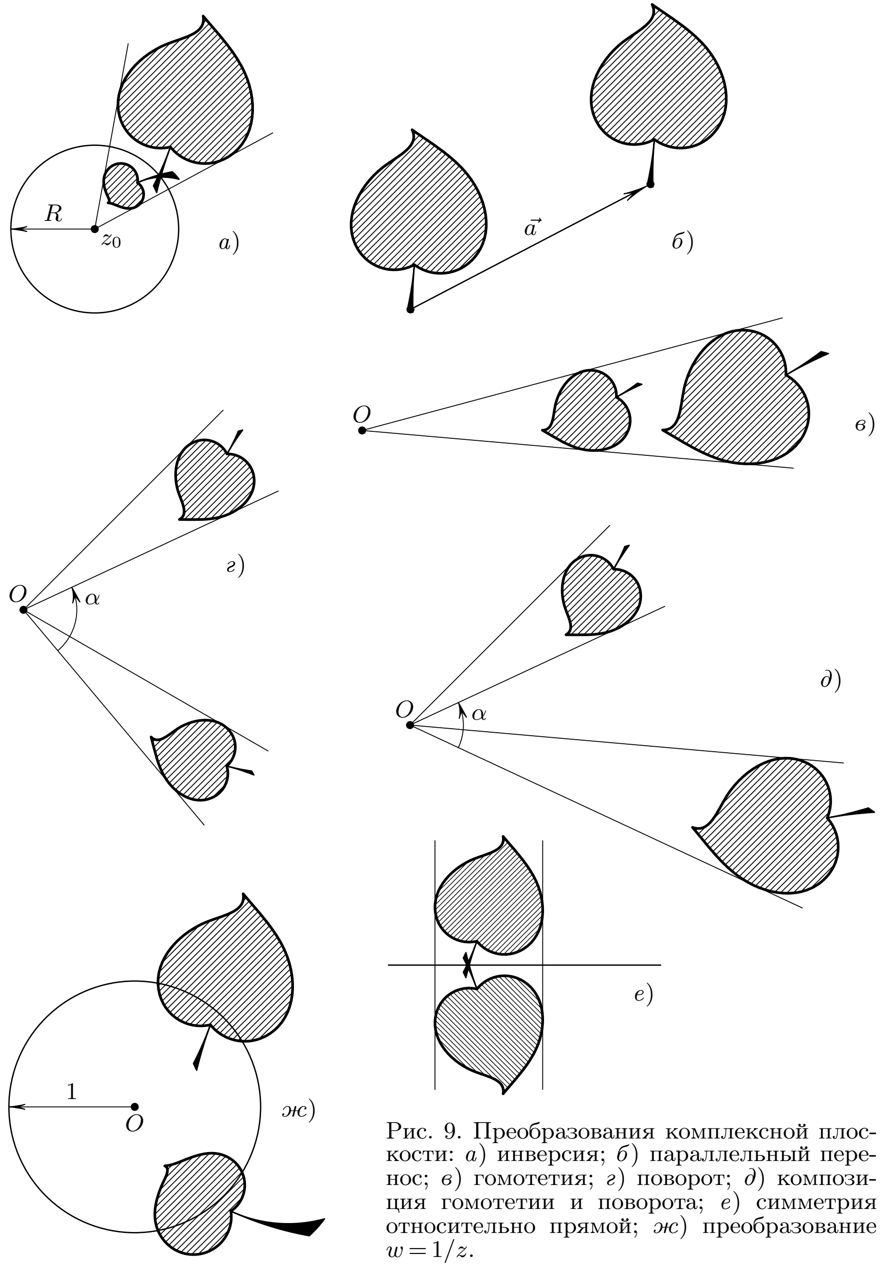

Рис. 9. Преобразования комплексной плоскости: *а*) инверсия; *б*) параллельный перенос; *в*) гомотетия; *г*) поворот; *д*) композиция гомотетии и поворота; *е*) симметрия относительно прямой; *ж*) преобразование $w = 1/z$.

6. Преобразование $w=\overline{z}$ отражает точки комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси, рис. 9, *е*.

7. Преобразование комплексной плоскости $w=\dfrac{1}{z}$, $z\neq 0$, является композицией симметрии относительно действительной оси и инверсии относительно единичной окружности, поскольку $\dfrac{1}{z}=\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)}$; при этом
$$w=\frac{1}{|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{|z|}\cdot(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)),$$
рис. 9, *ж*.

Перечисленные преобразования 1—7 обладают следующим общим свойством: они переводят окружности и прямые комплексной плоскости в окружности и прямые (при этом возможно, что некоторые окружности переходят в прямые, а некоторые прямые — в окружности; так происходит, например, при инверсии, см. § 6). Обладающие этим свойством преобразования называют *круговыми*.

Теорема. Все круговые преобразования описываются дробно-линейными выражениями:
$$\text{I)}\ \ w=\frac{az+b}{cz+d} \quad\text{или}\quad \text{II)}\ \ w=\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, \tag{4}$$
где a, b, c, d — некоторые комплексные коэффициенты, причём $bc-ad\neq 0$.

Преобразования вида I и II называют дробно-линейными преобразованиями первого и второго рода соответственно. Их различие заключается в том, что при преобразованиях второго рода изменяется ориентация плоскости, т. е. изменяется направление обхода окружностей, в то время как при преобразованиях первого рода ориентация не меняется.

Мы проведём доказательство теоремы только в одну сторону: покажем, что каждое преобразование вида (4) является круговым. Обратное утверждение: любое круговое преобразование описывается одной из формул (4) — доказывается непросто и рассматривается в курсах комплексного анализа.

Доказательство. Покажем сначала, что при дробно-линейных преобразованиях первого рода сохраняется двойное отношение точек. Действительно, если z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре различные точки, отличные от $-\dfrac{d}{c}$, и при преобразовании $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ они переходят в точки w_1, w_2, w_3, w_4 соответственно, то при $i\neq j$ имеем:
$$w_i-w_j=\frac{az_i+b}{cz_i+d}-\frac{az_j+b}{cz_j+d}=\frac{(az_i+b)(cz_j+d)-(az_j+b)(cz_i+d)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}=$$
$$=\frac{z_i(ad-bc)-z_j(ad-bc)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}=\frac{(ad-bc)(z_i-z_j)}{(cz_i+d)(cz_j+d)},$$

поэтому
$$\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}:\frac{w_1-w_4}{w_2-w_4}=\frac{\frac{(ad-bc)(z_1-z_3)}{(cz_1+d)(cz_3+d)}}{\frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}}:\frac{\frac{(ad-bc)(z_1-z_4)}{(cz_1+d)(cz_4+d)}}{\frac{(ad-bc)(z_2-z_4)}{(cz_2+d)(cz_4+d)}}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}.$$
Аналогичные вычисления для дробно-линейных преобразований второго рода показывают, что они заменяют двойное отношение на комплексно сопряжённое.

Чтобы задать на комплексной плоскости окружность или прямую, отметим на ней три различных точки z_1, z_2, z_3; тогда по теореме из § 2 эта окружность или прямая состоит из тех и только тех точек z, для которых двойное отношение $\gamma=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\dfrac{z_1-z}{z_2-z}$ является действительным числом. Пусть w_1, w_2, w_3, w — образы точек z_1, z_2, z_3, z соответственно при преобразованиях (4); положим $\delta=\dfrac{w_1-w_3}{w_2-w_3}:\dfrac{w_1-w}{w_2-w}$. Поскольку при дробно-линейном преобразовании двойное отношение точек либо сохраняется, либо меняется на комплексно сопряжённое, то $\gamma\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\delta\in\mathbb{R}$; условие же $\delta\in\mathbb{R}$ равносильно тому, что точка w лежит на окружности или прямой, заданной точками w_1, w_2, w_3.

Таким образом, преобразования (4) переводят прямые и окружности в прямые и окружности и, тем самым, являются круговыми, что и требовалось доказать.

Имеет место и более сильное утверждение: произвольное дробно-линейное преобразование можно представить в виде композиции преобразований 1—7. Докажем это.

Для преобразований первого рода имеем (при $c\neq 0$):
$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+\frac{bc-ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \tag{5}$$
(очевидный случай $c=0$ рассмотрите самостоятельно). Записав формулу преобразования в таком виде, видим, что оно является композицией параллельного переноса $z\to z+\dfrac{d}{c}$, преобразования $z\to\dfrac{1}{z}$, гомотетии и поворота $z\to\dfrac{bc-ad}{c^2}z$ и ещё одного параллельного переноса $z\to z+\dfrac{a}{c}$.

В случае преобразования второго рода ситуация аналогична:
$$w=\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}=\frac{\frac{a}{c}(c\overline{z}+d)+\frac{bc-ad}{c}}{c\overline{z}+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{\overline{z}+\frac{d}{c}}. \tag{5$'$}$$

Замечание. Из формул (5) и (5$'$) становится понятным, зачем в формулировке теоремы присутствует условие $bc-ad\neq 0$: иначе оба преобразования (4) переводят всю комплексную плоскость в одну точку $w = \frac{a}{c}$.

Круговые преобразования являются частным случаем *конформных преобразований* комплексной плоскости, т. е. таких преобразований, при которых сохраняются углы между кривыми (угол между двумя пересекающимися кривыми — это по определению угол между касательными, проведёнными к кривым в точке их пересечения).

Упражнения

54. В результате композиции гомотетии и поворота вокруг начала координат точка $(1; 2)$ перешла в точку $(11; 2)$. Найдите коэффициент гомотетии.

55. Запишите в комплексных числах поворот на угол 30° по часовой стрелке вокруг точки с координатами $(2; 3)$.

Указание. Представьте это преобразование в виде композиции трёх: параллельного переноса, совмещающего точку $(2; 3)$ с началом координат; поворота; параллельного переноса, совмещаюшего начало координат с точкой $(2; 3)$.

56. Запишите в комплексных числах симметрию относительно прямой $(1+i)z + (1-i)\overline{z} - 2 = 0$.

57. Представьте каждое из преобразований 1—7 в виде (4) и укажите его род.

58. Сколько неподвижных точек, т. е. таких точек z, что $z = w(z)$, может иметь круговое преобразование?

Заочная школа «Юный математик»

Заочная школа «Юный математик» работает при поддержке Всероссийской заочной многопредметной школы и Московского центра непрерывного математического образования. Основная задача «Юного математика» — обеспечить школьникам со всей России доступ к качественному математическому образованию.

В школе «Юный математик» обучаются школьники 8—11 классов. Обучение проводится заочно — как по переписке, так и с использованием электронной почты и других интернет-технологий. В рамках школы организовано три потока:

- поток «элементарная математика» по программе углубленного изучения школьного курса математики (для 8—11 классов);
- одногодичный поток «ГИА» по подготовке к Государственной итоговой аттестации (для 9 класса);
- одногодичный поток «ЕГЭ» по подготовке к Единому государственному экзамену (для 11 класса).

Зачисление на поток «элементарная математика» конкурсное по результатам выполнения вступительной работы, задачи которой зимой размещаются на нашем сайте и публикуются в различных математических и научно-популярных журналах и газетах. Победители и призеры региональных, городских или районных математических олимпиад принимаются без выполнения вступительной работы. На потоки «ГИА» и «ЕГЭ» принимают всех желающих. Сроки приема заявок вы можете найти на нашем сайте.

После зачисления каждый учащийся получает комплект методических пособий, по которым он в течение года будет выполнять в письменном виде контрольные задания и высылать их в заочную школу. За год учащийся выполняет, в зависимости от класса, от 7 до 11 заданий, отправляя их на проверку каждые 20—30 дней. Преподаватели, проверяющие задание, укажут на допущенные ошибки, разъяснят неточности в рассуждениях и дадут подробные указания к нерешенным задачам. Проверенная работа будет выслана обратно. Учащиеся потоков «ГИА» и «ЕГЭ» имеют возможность через интернет выполнять соответствующие тесты в электронном виде.

Подготовку методических пособий и проверку работ учащихся осуществляют сотрудники ВЗМШ и МЦНМО — опытные учителя и методисты, а также аспиранты и студенты механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

В Заочной школе «Юный математик» имеется возможность обучения нескольких учеников по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего преподавателя (обычно — школьного учителя), используя методические материалы и интернет-ресурсы нашей школы. Руководство группой «Коллективный ученик» дает учителю возможность повысить свою педагогическую квалификацию с получением соответствующего свидетельства. Группы «Коллективный ученик» зачисляются в школу «Юный математик» без конкурса.

Для того, чтобы учиться в школе «Юный математик», не обязательно быть победителем каких-либо математических олимпиад, главное — это интерес к математике и желание получить дополнительные знания в этой увлекательной науке. Обучение в нашей школе окажется полезным не только для тех, кто намерен связать свою дальнейшую судьбу с математикой, ведь, как говорил основатель Московского университета М. В. Ломоносов, «математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

Более подробную информацию о нашей школе вы можете найти в интернете по адресу `www.zaoch.ru`