Алгебраическая геометрия

12 ноября 2021 г.

> ... многие живые и по-настоящему содержательные области математики не имеют практических приложений (и не найдут, скорее всего, в силу высокого уровня абстракции). Современные примеры – аналитическая теория чисел и алгебраическая геометрия.
>
> Пол Халмош, 1981
>
> „Прикладная математика – плохая математика"

Многочлен от двух переменных

Полиномиальное уравнение от двух переменных

Пример: x^2+y^2-1 – многочлен

$x^2+y^2-1=0$ – уравнение

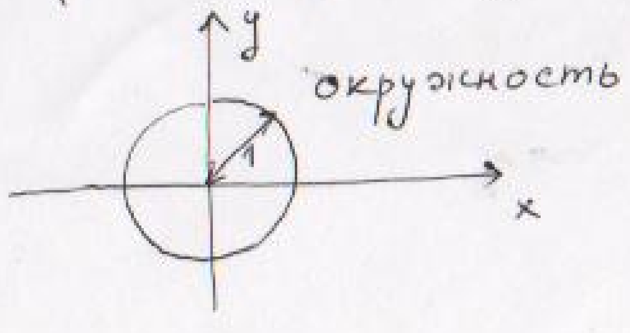
- над $\mathbb{Q}$
- над $\mathbb{R}$
- над $\mathbb{C}$
- над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

над $\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi\in\mathbb{R}$ – вещественный параметр

(хороший ответ, если знать тригонометрию)

$\cos\varphi = 1-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^4}{4!}-\ldots$

алгебраическая геометрия



– наглядный ответ

(2) $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ (или $\mathbb{Q}[x,y]$)

Определение: плоская алгебраическая кривая $C_f \subset \mathbb{C}^2$ — это множество решений уравнения $f(x,y)=0$, т.е.

$$C_f = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y)=0\}.$$

Наблюдение: над $\mathbb{C}$ кривые $C_1 = \{x^2+y^2=1\}$ и $C_2 = \{x^2-y^2=1\}$ аффинно (даже линейно) эквивалентны.

$$C_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2-1=0\}$$

замена: $\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = iy \end{cases} \rightsquigarrow \{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 1\}$ — C_1 в новых координатах

- римановы поверхности (ТФКП)
- сферы с g ручками и выколотыми точками (топология)
- ...

g = род

③ <u>deg 1</u> $\deg f = 1 \Rightarrow f(x,y) = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow C_f$ — прямая в $\mathbb{C}^2$, если a и b не равны одновременно 0.

$a = b = 0$ $c \neq 0 \rightsquigarrow C_f = \varnothing$
$\qquad\qquad\quad c = 0 \rightsquigarrow C_f = \mathbb{C}^2$ } не похожи на кривые

<u>deg 2</u> $f(x,y) = \underline{ax^2 + bxy + cy^2} + dx + ey + f$ — уравнение второго порядка

Аффинная классификация кривых второго порядка (коник)

квадратичная форма $Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$

Упр. завершить классификацию

(1) $\det Q = 0$ — „вырожденный" случай

$\quad \| \quad ac - \frac{b^2}{4} = -\frac{1}{4}(\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{дискриминант}})$

(2) $\det Q \neq 0$ — „НЕвырожденный" случай

$ax^2 + bxy + cy^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$ (метод выделения полного квадрата)
$\|$ метод Лагранжа

линейные функции от x и y

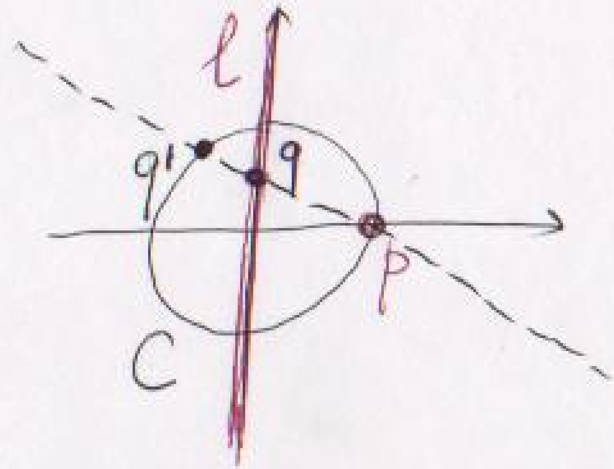
$\Rightarrow$  негладкая (пара прямых)    гладкая (окружность)

(4) **Пример:** $\{x^2+y^2-1=0\} = C$ — коника общего положения

Вопрос: Как найти все решения над $\mathbb{Q}$?

Ответ: (1) Найти одну точку $p=(x_0,y_0)\in C\cap\mathbb{Q}^2$.

$x_0=1,\ y_0=0$



(2) Выбрать прямую $\ell=\{ax+by+c=0\}$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$.

$\{x=0\}$

рациональная точка

(3) $q\in\mathbb{Q} \rightsquigarrow q\in\ell\cap\mathbb{Q}^2 \rightsquigarrow q'\in C$ — проекция точки q на конику C из точки p

Наблюдение: q' — тоже рациональная точка, и любая рациональная точка на C так получится.

Упр. Точки p и q рациональны $\Rightarrow$ прямую pq можно задать уравнением с рациональными коэффициентами.

(5) **Обоснование:** q' по построению точка пересечения прямой pq и коники C = (одно из) решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 & (\text{задаёт } C) \\ \underset{\in\mathbb{Q}}{\underline{\tilde a}}\,x+\underset{\in\mathbb{Q}}{\underline{\tilde b}}\,y+\underset{\in\mathbb{Q}}{\underline{\tilde c}}=0 & (\text{задаёт прямую } pq) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ сводится к квадратному уравнению на x с рациональными коэффициентами:

$$\underset{\in\mathbb{Q}}{\underline{A}}\,x^2+\underset{\in\mathbb{Q}}{\underline{B}}\,x+\underset{\in\mathbb{Q}}{\underline{C}}=0$$

Мы знаем (рациональный) корень x_1 (= x-координата точки p)

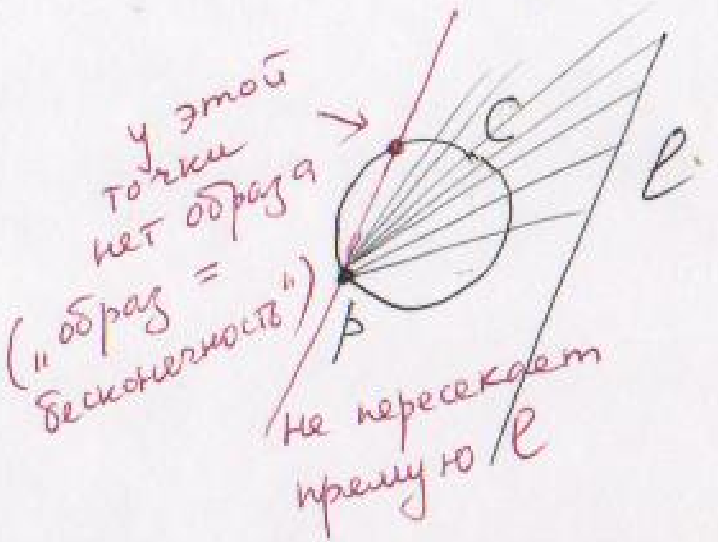
$\Rightarrow$ по теореме Виета $x_2 = -\dfrac{B}{A} - x_1 \in \mathbb{Q}$

Как называется этот метод:

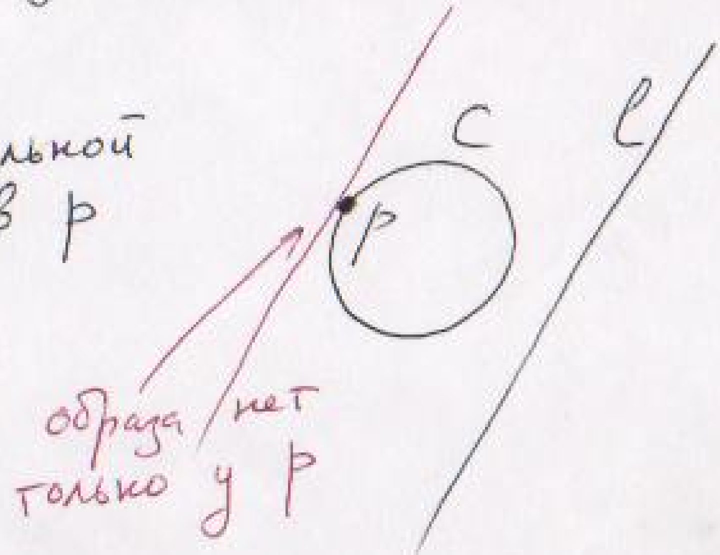
- Универсальная тригонометрическая подстановка (для окружности)
- Рациональная параметризация коники $\qquad \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

⑥ **Теорема**: есть „почти биекция" между рациональными точками на C и рациональными точками на ℓ.

Чтобы сформулировать строго, нужно рассматривать случаи:



$\ell \nparallel$ касательной к C в p



$\ell \parallel$ касательной к C в p

МЫ НЕ БУДЕМ РАЗБИРАТЬ СЛУЧАИ — МЫ ПЕРЕЙДЁМ НА ПРОЕКТИВНУЮ ПЛОСКОСТЬ.