

## Семинар 7. Рациональные точки на окружности

Алгебра в криптографии, осенний семестр 2021 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача из теста** (Совпадает с задачей 1 ниже). Найдите все решения уравнения

$$(a) x^2 - y^2 = 1; \quad (б) x^2 + y^2 = 1$$

в рациональных числах.

**Задача 1** (Проективные замены координат). (а) Найдите все рациональные решения уравнения

$$u^2 - v^2 = 1.$$

Иными словами найдите все точки с рациональными координатами на гиперболе. (Подсказка: разложите левую часть на множители.)

(б) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

(Подсказка: сделайте подстановку  $u = \frac{z}{y}$ ,  $v = \frac{x}{y}$  и воспользуйтесь пунктом (а).)

(в) Найдите все рациональные решения уравнения

$$u_1^2 + v_1^2 = 1.$$

Иными словами найдите все точки с рациональными координатами на окружности. (Подсказка: сделайте подстановку  $u_1 = \frac{x}{z}$ ,  $v_1 = \frac{y}{z}$  и воспользуйтесь пунктом (б).)

(г) Напишите явные формулы замены переменных для перехода от решения  $(u, v)$  в пункте (а) к решению  $(u_1, v_1)$  в пункте (в), и обратно.

**Задача 2** (Пифагоровы тройки). Найдите все пифагоровы треугольники (то есть прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами). (Подсказка: воспользуйтесь предыдущей задачей.)

**Задача 3** (Универсальная тригонометрическая подстановка). Покажите, что  $\cos 2\varphi$  и  $\sin 2\varphi$  — рациональные числа тогда и только тогда, когда  $\operatorname{tg} \varphi$  — рациональное число. (Подсказка: представьте  $\cos 2\varphi$  и  $\sin 2\varphi$  как рациональные функции от  $\operatorname{tg} \varphi$ .)

**Задача 4** (Универсальная гиперболическая подстановка). Покажите, что  $\cosh 2\varphi$  и  $\sinh 2\varphi$  — рациональные числа тогда и только тогда, когда  $\operatorname{th} \varphi$  — рациональное число.

**Задача 5** (Рациональная параметризация окружности). (а) На вещественной плоскости дана окружность  $C$ , заданная уравнением  $x^2 + y^2 = 1$ , прямая  $l$ , заданная уравнением  $x = 1$  и точка  $p = (-1, 0)$  на окружности. Отображение (не всюду определённое) проекции  $\pi : l \dashrightarrow C$  прямой  $l$  на окружность  $C$  сопоставляет точке  $q \in l$  точку пересечения прямой  $pq$  с окружностью  $C$ . Найдите явные формулы для координат точки  $\pi(q)$ , где  $q = (0, a)$  (здесь  $a$  — вещественный параметр).

(б) Как эта задача связана с задачей 3?

**Задача 6.** Найдите все точки с рациональными координатами на эллипсе, заданном уравнением

$$2x^2 + 3y^2 = 5.$$

(Подсказка: обобщите метод секущих из предыдущей задачи.)