

Семинар 8. Проективные замены координат

Алгебра в криптографии, осенний семестр 2021 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Определение 1. Замена координат $(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y})$ на координатной плоскости \mathbb{F}^2 над полем \mathbb{F} называется проективной (или дробно-линейной), если

$$\tilde{x} = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}; \quad \tilde{y} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

для некоторой невырожденной 3×3 матрицы $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ с коэффициентами в \mathbb{F} .

Задача 1. Придумайте проективную замену координат, переводящую окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$ на вещественной плоскости в

(а) гиперболу $\{xy = 1\}$; (б) параболу $\{y = x^2\}$.

Задача 2. (а) Пусть $q(x, y, z)$ — невырожденная неопределённая вещественная квадратичная форма на \mathbb{R}^3 . Покажите, что линейной заменой координат $(x, y, z) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ можно привести q ровно к одной из двух канонических форм:

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 \text{ или } -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2.$$

(б) Покажите, что все невырожденные вещественные коники проективно эквивалентны (=переводятся друг в друга проективной заменой координат).

(в) Классифицируйте все вещественные проективные коники (=классифицируйте коники с точностью до проективных замен координат).

Задача 3. Классифицируйте все комплексные проективные коники.

Задача 4. Придайте точный математический смысл утверждениям:

(а) “Гипербола проходит через две бесконечно удалённые точки.”

(б) “Парабола касается бесконечно удалённой прямой в точке, которая задает направление, параллельное оси этой параболы.”

(в) “Каждая окружность проходит через две фиксированные комплексные бесконечно удалённые точки.”

Задача 5. (а) Пусть p — простое число. Сколько решений (по модулю p) имеет сравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{p}?$$

(б) Классифицируйте все невырожденные проективные коники над полем из p элементов.

Задача 6 (Уравнение Пелля). (а) Найдите все точки с рациональными координатами на гиперболе, заданной уравнением

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

(б) Найдите все целочисленные решения диофантова уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$