

Домашнее задание 1.

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Сколько решений имеет сравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \pmod{p}$$

для простого числа p ?

Задача 2. Выясните, какие простые числа представляются в виде $x^2 + xy + y^2$ для целых x и y .

Задача 3. Найдите квадратичное подполе (то есть поле вида $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d — целое число, не являющееся полным квадратом) в поле $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{7}})$.

Задача 4. Вычислите первые десять цифр одного из значений $\sqrt{2}$ в кольце целых 7-адических чисел \mathbb{Z}_7 .

Задача 5. Определим подгруппу $H_{2,3} \subset \mathbb{Q}$ как множество всех рациональных чисел, знаменатель которых является произведением степеней двойки и тройки:

$$H_{2,3} = \left\{ \frac{m}{2^k 3^\ell} \mid m, k, \ell \in \mathbb{Z}, k, \ell \geq 0 \right\},$$

Опишите группу автоморфизмов $\text{Aut}(H_{2,3}/\mathbb{Z})$.