Семинар 5. Задачи про p-адические числа из курса Алексея Зыкина

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите p-адическое разложение для
(а) $\frac{2}{3}$ в $\mathbb{Q}_2$; (б) $-\frac{1}{6}$ в $\mathbb{Q}_7$; (в) $\frac{1}{10}$ в $\mathbb{Q}_{11}$; (г) $\frac{1}{120}$ в $\mathbb{Q}_5$.

Задача 2. (а) Целое число a взаимно просто с простым числом p. Докажите, что последовательность a^{p^n} сходится в $\mathbb{Z}_p$ и для её предела α выполнены сравнение $\alpha \equiv a \pmod p$ и равенство $\alpha^{p-1} = 1$.

(б) Докажите, что многочлен $x^{p-1} - 1$ раскладывается на линейные множители в $\mathbb{Q}_p[x]$.

(в) Докажите, что корни из единицы в $\mathbb{Q}_p$ —это в точности корни степени $p-1$ при нечётном p и ± 1 при $p = 2$.

Задача 3. Покажите, что над полем $\mathbb{Q}_p$ (в отличие от поля $\mathbb{R}$) существуют расширения произвольной степени.

Задача 4 (Как устроена мультипликативная группа поля $\mathbb{Q}_p$)**.** Обозначим $\mathbb{Z}_p^*$ через U, а $1 + p^n\mathbb{Z}_p$ — через U_n.

(а) Покажите, что $\varprojlim U/U_n = U$ и $U_n/U_{n+1} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(б) Докажите изоморфизм $U \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times U_1$. (Используйте, что $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ вкладывается в $\mathbb{Z}_p^*$ как подгруппа корней степени $p-1$ из единицы.)

(в) Пусть $x \in U_n \setminus U_{n+1}$, и p нечётно. Покажите, что $x^p \in U_{n+1} \setminus U_{n+2}$. Докажите аналогичное утверждение для $p = 2$ и $n \geq 2$.

(г) Убедитесь, что при $p \neq 2$ группа U_1/U_n циклическая. Выведите отсюда, что $U_1 \simeq \mathbb{Z}_p$.

(д) Докажите, что при $p = 2$ имеется изоморфизм $U_1 \simeq \{\pm 1\} \times U_2 \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}_2$.

(е) Получите, что $\mathbb{Q}_p^* \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ при нечётном p и $\mathbb{Q}_2^* \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 5. (а) Убедитесь, что поля $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_q$ для различных простых чисел p и q неизоморфны.

(б) Существует ли такое простое p, что $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}_p$?

(в) Найдите группу автоморфизмов поля $\mathbb{Q}_p$. (Проверьте, что любой автоморфизм непрерывен.)

Задача 6. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Покажите, что простых чисел p, для которых $f(x)$ имеет корень в $\mathbb{Z}_p$, бесконечно много.