Семинар 7. Арифметика квадратичных целых

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Группа классов идеалов). Пусть R — кольцо целых мнимого квадратичного числового поля.

(а) Проверьте, что для любого ненулевого идеала $I \subset R$ и сопряжённого идеала $\overline{I} := \{\overline{a} \mid a \in I\}$ выполнено тождество: $I\overline{I} = (n)$ для некоторого обыкновенного целого числа $n \in \mathbb{Z}$.

(б) Докажите, что классы эквивалентности идеалов в R (по модулю главных идеалов) образуют группу относительно умножения.

(в) Пользуясь пунктом (а), определим норму $N(I)$ идеала I как положительное целое число n со свойством $(n) = I\overline{I}$. Докажите, что норма мультипликативна, то есть $N(I)N(J) = N(IJ)$.

(г) Докажите, что $N(I) = |R/I|$.

Задача 2. Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(а) Докажите, что каждый идеал кольца R эквивалентен некоторому идеалу, содержащему главный идеал (2).

(б) Найдите кольцо вычетов $R/(2)$.

(в) Докажите, что число классов идеалов кольца R равно 2.

(г) Разложите идеал $(6) \subset R$ в произведение простых идеалов.

Задача 3 (Арифметика треугольников). Назовём треугольник *арифметическим*, если квадраты длин его сторон — целые числа. Скажем, что два треугольника *эквивалентны*, если их вершины принадлежат одной и той же решётке на плоскости, а их площади равны.

(а) Докажите, что каждый арифметический треугольнику эквивалентен арифметическому треугольнику без тупых углов.

(б) Докажите, что существует арифметический треугольник со стороной $\sqrt{d}$, эквивалентный треугольнику со сторонами $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ тогда и только тогда, когда $d = ax^2 + (a + b - c)xy + by$ для некоторых взаимно простых целых чисел x и y.

(в) Докажите, что число представляется в виде $x^2 + y^2$ для некоторых целых x и y тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $5u^2 + 6uv + v^2$ для некоторых целых u и v.

Задача 4. (а) Постройте рациональную параметризацию гиперболы $x^2 - 2y^2 = 1$ над полем $\mathbb{Q}$.

(б) Найдите мультипликативную группу кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(в) Найдите все целые решения уравнения Пелля:

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Задача 5 (Функция Эйлера). Пусть R — кольцо целых числового поля. Определим функцию $\varphi(I)$ от идеала $I \subset R$ как количество классов вычетов $[a]$ по модулю I, которые взаимно просты с I (то есть $I + (a) = R$). Докажите, что

(а) если идеалы I и J взаимно просты, то $\varphi(IJ) = \varphi(I)\varphi(J)$;

(б) верно тождество (произведение берётся по всем простым идеалам, делящим I):

$$\varphi(I) = N(I) \prod_{P|I} \left(1 - \frac{1}{N(P)}\right).$$