Семинар 9. Вокруг дзета-функции Римана

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Выясните, при каких значениях $s \in \mathbb{R}$ абсолютно сходится ряд:

$$\text{(а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}; \quad \text{(б)}\ \sum_{p \in P} \frac{1}{p^s},$$

где через P обозначается множество всех простых натуральных чисел.

Задача 2. (а) Докажите, что $\operatorname{sh}(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z)$, где многочлены $p_n(z)$ определяются формулой:

$$p_n(z) := \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1-\frac{z}{n}\right)^n\right].$$

(б) Проверьте, что если $n = 2m+1$, то

$$p_n(z) = z \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi k}{n}}\right).$$

(в) С помощью пунктов (а) и (б) докажите формулу[1]

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

(г) Вычислите $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, ...

Задача 3. Рассмотрим все целые точки внутри круга радиуса N с центром в нуле. Обозначим через p_N вероятность того, что целочисленная длина отрезка, соединяющего одну из этих точек с центром круга, равна единице. Найдите явную формулу для

$$\lim_{N\to\infty} p_N.$$

(Напомним, что *целочисленной длиной* отрезка с целыми вершинами называется количество целых точек на отрезке, включая концы, минус один.)

Задача 4. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ — квадратичное поле с дискриминантом D.

(а) Найдите такой характер Дирихле, чтобы выполнялось тождество:

$$\zeta_K(s) = L(\chi, s)\zeta(s).$$

(Подсказка: разложите обе дзета-функции, и Римана и Дедекинда, в бесконечное произведение.)

(б) Выведите из пункта (а) квадратичный закон взаимности. (Подсказка: возьмите $d = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q$, где q — простое число.)

---

[1] План доказательства позаимствован из статьи W.F. Eberlein, “On Euler’s Infinite Product for the Sine”, которая использует идею Эйлера и стандартный анализ 19-го века. Тем удивительней, что эта идея была адекватно формализована лишь во второй половине 20-го века — через двести с лишним лет после эвристического доказательства Эйлера.