Домашнее задание 2.

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. На целочисленной решётке $L = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}$ задана функция $f : L \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющая свойствам:

(1) $f(nv) = n^2 f(v)$ для всех $v \in L$ и $n \in \mathbb{Z}$;

(2) $f(u+v) + f(u-v) = 2(f(u) + f(v))$ для всех $u, v \in L$.

(а) Покажите, что на $\mathbb{R}^2$ найдётся единственная квадратичная форма q, такая что $f(v) = q(v)$ для всех $v \in L$.

(б) Выпишите явно форму q из пункта (а) в базисе $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, если известно, что $f(e_1) = f(e_1 + e_2) = 3$, $f(e_2) = 2$.

Задача 2. (а) Пусть цепная дробь для числа $\sqrt{d}$, где $d \in \mathbb{N}$, имеет минимальный период длины k. Докажите, что пара (p_k, q_k), составленная из числителя и знаменателя k-той подходящей дроби для $\sqrt{d}$, удовлетворяет уравнению:

$$x^2 - dy^2 = (-1)^k.$$

(Точное определение k-той подходящей дроби должно быть частью решения.)

(б) Найдите все решения уравнения Пелля

$$x^2 - 57y^2 = 1$$

Задача 3. Найдите количество классов эквивалентности целочисленных квадратичных форм $ax^2 + bxy + cy^2$, дискриминант которых совпадает с дискриминантом формы:

(а) $x^2 + 5y^2$; (б) $x^2 + 14y^2$.

Задача 4. Покажите, что кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ не является факториальным, когда $d \equiv 2 \pmod 4$ и $d < -2$.

Задача 5. Найдите группу классов идеалов и нарисуйте все возможные формы решёток идеалов (с точностью до подобия) в кольце целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$.