Семинар 10. Распределение простых чисел

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Через P обозначим множество всех простых натуральных чисел.

(а) Докажите, что при $s > 1$ справедливо тождество:

$$\sum_{p\in P}^{\infty} \frac{1}{p^s} = \ln\zeta(s) - \sum_{p\in P}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{jp^{js}}.$$

(б) Докажите, что

$$\lim_{s\to+1} \sum_{p\in P}^{\infty} \frac{1}{p^s} = \lim_{s\to 1} \ln\zeta(s).$$

Задача 2. Найдите пробелы в следующем доказательстве[1] асимптотической оценки

$$\sum_{p\in P,\, p\leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln n).$$

`Логарифмируя тождество`

$$\zeta(s) = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

`выводим тождество`

$$\ln(\zeta(s)) = -\sum_{p\in P} \ln(1-\frac{1}{p^s}).$$

`Применяя к последнему тождеству аргументы задачи 1 при` $s = 1$ `и используя известную асимптотику для гармонического ряда`

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n,$$

`получаем искомую оценку.`

Задача 3 (Серр, глава VI, раздел 3.4)**.** Обозначим через $G(m)$ группу $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

(а) Пусть p — простое число, не делящее m. Обозначим через $\operatorname{ord}(p)$ порядок вычета $[p]_m$ в группе $G(m)$, а через $\operatorname{ind}(p)$ индекс подгруппы, порождённой $[p]_m$, в $G(m)$. Докажите тождество для многочленов от t:

$$\prod_{\chi}(1-\chi(p)t) = (1-t^{\operatorname{ord}(p)})^{\operatorname{ind}(p)}.$$

Здесь и далее произведение берётся по всем характерам группы $G(m)$.

(б) Определим функцию $\zeta_m(s)$ как произведение L-функций:

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(s,\chi).$$

Докажите тождество:

$$\zeta_m(s) = \prod_{p\nmid m} \frac{1}{(1-\frac{1}{p^{\operatorname{ord}(p)}})^{\operatorname{ind}(p)}}.$$

[1] Взято из видеоролика https://youtu.be/nXw__bGhjh0 на канале Pro Math.

(в) Проверьте, что $\zeta_m(s)$ имеет простой полюс при $s = 1$ и выведите отсюда, что $L(1, \chi) \neq 0$ для каждого нетривиального характера χ.