

Семинар 11. Модулярная группа

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Определим дробно-линейные преобразования комплексной плоскости:

$$S : z \rightarrow -\frac{1}{z}; \quad T : z \rightarrow z + 1.$$

Зададим подмножество $D \subset \mathbb{C}$ неравенствами $|z| \geq 1$ и $\operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$. Через $H \subset \mathbb{C}$ обозначим верхнюю полуплоскость, $H = \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(а) Нарисуйте образы области D при действии преобразований

$$1, T, TS, ST^{-1}S, ST^{-1}, S, ST, STS, T^{-1}S, T^{-1}.$$

(б) Докажите, что для каждого $z \in H$ найдётся такой элемент $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$, что $g(z) \in D$.

(в) Найдите все такие точки $z \in D$ и все такие неединичные элементы $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$, что $g(z) \in D$.

Задача 2. (а) Проверьте, что S и T порождают модулярную группу.

(б) Проверьте, что в модулярной группе выполняются соотношения $S^2 = e$, $(ST)^3 = e$.

(в) Найдите такую композицию преобразований S и T , которая переводит число $\frac{5}{3}$ в число 0. $0 = (\frac{5}{3})SLSLSLSL$

(г*) Докажите, что каждое соотношение между S и T в модулярной группе следует из соотношений пункта (б).

Задача 3. В вершинах квадрата $ABCD$ стоят четыре школьника и держат два каната: один канат соединяет вершины A и D , второй — вершины B и C . Школьники выполняют два типа перемещений, S и T , не выпуская из рук канатов. Тип S : каждый школьник перемещается в соседнюю вершину квадрата (по часовой стрелке). Тип T : школьники из вершин A и B меняются местами, при этом школьник из вершины B должен пройти *под* канатом школьника из вершины A .

(а) Нарисуйте зацепление канатов после композиции T^2ST^3 . (Слово читается справа налево, то есть сначала три раза проделывается T , потом S и т.д.)

(б) Найдите последовательность перемещений S и T , которая позволит школьникам распутать зацепление из пункта (а)¹. (в) $0 = (\frac{5}{3})SLSLSLSL$

¹Хотите повторить с настоящими школьниками — смотрите <https://youtu.be/-kU7loNwJ84>