Семинар 12. Теорема Ферма.

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1 ($n = 4$)**.** (а) Докажите, что все примитивные пифагоровы тройки (=натуральные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, такие что НОД$(x, y, z) = 1$) с точностью до перестановки имеют вид

$$x = 2ab; \quad y = a^2 - b^2; \quad z = a^2 + b^2$$

для некоторых натуральных a и b.

(б) Докажите, что уравнение

$$x^4 + y^4 = z^2$$

не имеет решений в целых числах.

Задача 2 ($n = 3$)**.** Обозначим через $R = \mathbb{Z}[\omega]$ кольцо целых чисел Эйзенштейна.

(а) Чему может быть равен остаток числа $a \in R$ при делении на $(1 - \omega)$?

(б) Пусть ε — единица (=обратимый элемент) в кольце R. Докажите, что если (x, y, z) — примитивное решение уравнения

$$x^3 + y^3 = \varepsilon z^3, \tag{1}$$

то $(1 - \omega)$ делит xyz.

(в) В предположениях пункта (б) докажите, что если $(1 - \omega) \nmid xy$ и $(1 - \omega) | z$, то тогда $(1 - \omega)^2 | z$.

(г) В предположениях пункта (б) докажите, что если $(1 - \omega) \nmid xy$ и $(1 - \omega)^k || z$[1] при $k \geq 2$, то тогда найдётся такое решение уравнения (1), что $(1 - \omega) \nmid xy$ и $(1 - \omega)^{k-1} | z$.

(д) Докажите, что уравнение (1) не имеет полностью ненулевых решений в R.

Задача 3 ($n \geq 5$)**.** Пусть p — нечётное простое число. Предположим, что (a, b, c) — примитивное решение уравнения

$$x^p + y^p = z^p.$$

(а) Найдите дискриминант эллиптической кривой Фрая:

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p).$$

(б) Пусть ℓ — нечётное простое число. Покажите, что если $\ell \nmid abc$, то кривая Фрая над полем $\mathbb{F}_\ell$ — гладкая.

(в) Пусть ℓ — произвольное простое число. Может ли кривая Фрая над полем $\mathbb{F}_\ell$ иметь касп (то есть особенность того же типа, что у полукубической параболы)?

[1] Символ $||$ в выражении $p^k || z$ означает, что p^k — это максимальная степень простого числа p в разложении числа z на простые множители.