2875, 3264 и другие задачи по геометрии

Валентина Кириченко*

*Факультет математики и Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений НИУ ВШЭ

и

Институт проблем передачи информации им. Харкевича РАН

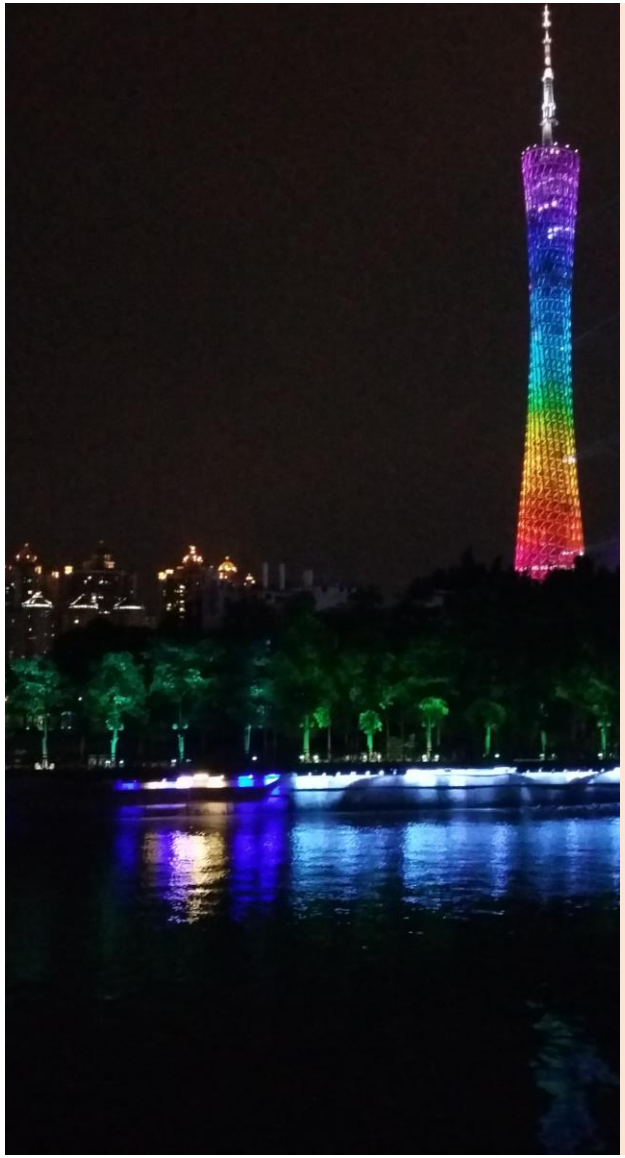
Сириус, 24 апреля 2023 г.

Задача Шуберта

Сколько прямых пересекают четыре данные прямые в пространстве?

Упражнение: придумайте конфигурацию из четырёх попарно скрещивающихся прямых, для которой ответ в задаче Шуберта бесконечен.

Герман Цезарь Ганнибал Шуберт



Подсказки

- телебашня Гуанчжоу (2009), Китай
- опора ЛЭП «Шуховская башня на Оке» (1927), Россия

Физический подход

Ко́злы для пилки дров – это четыре данные прямые.

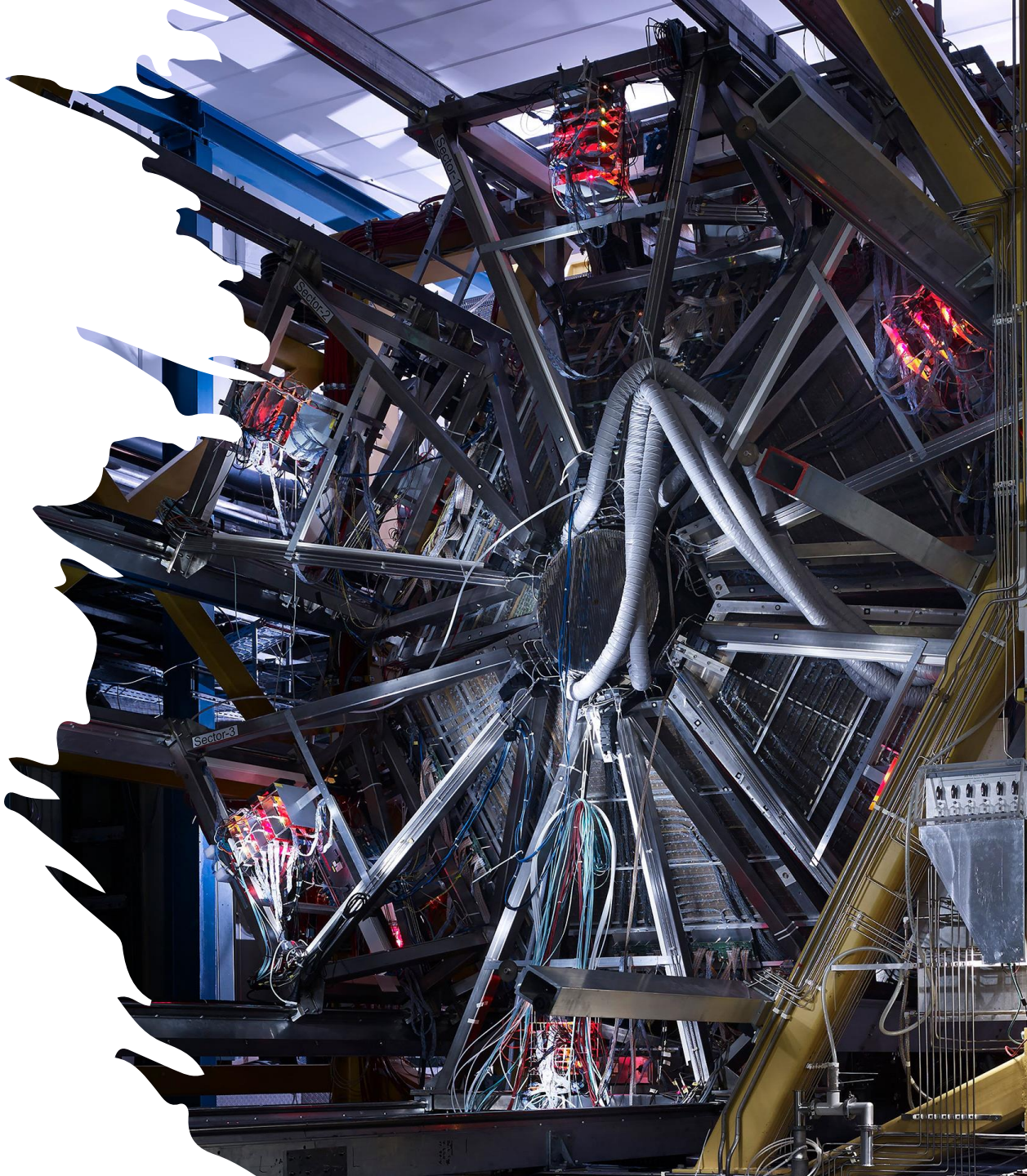
Физический подход

Ко́злы для пилки дров – это четыре данные прямые.

Бревно на козлах – это прямая, которая пересекает четыре данные.

Физический подход

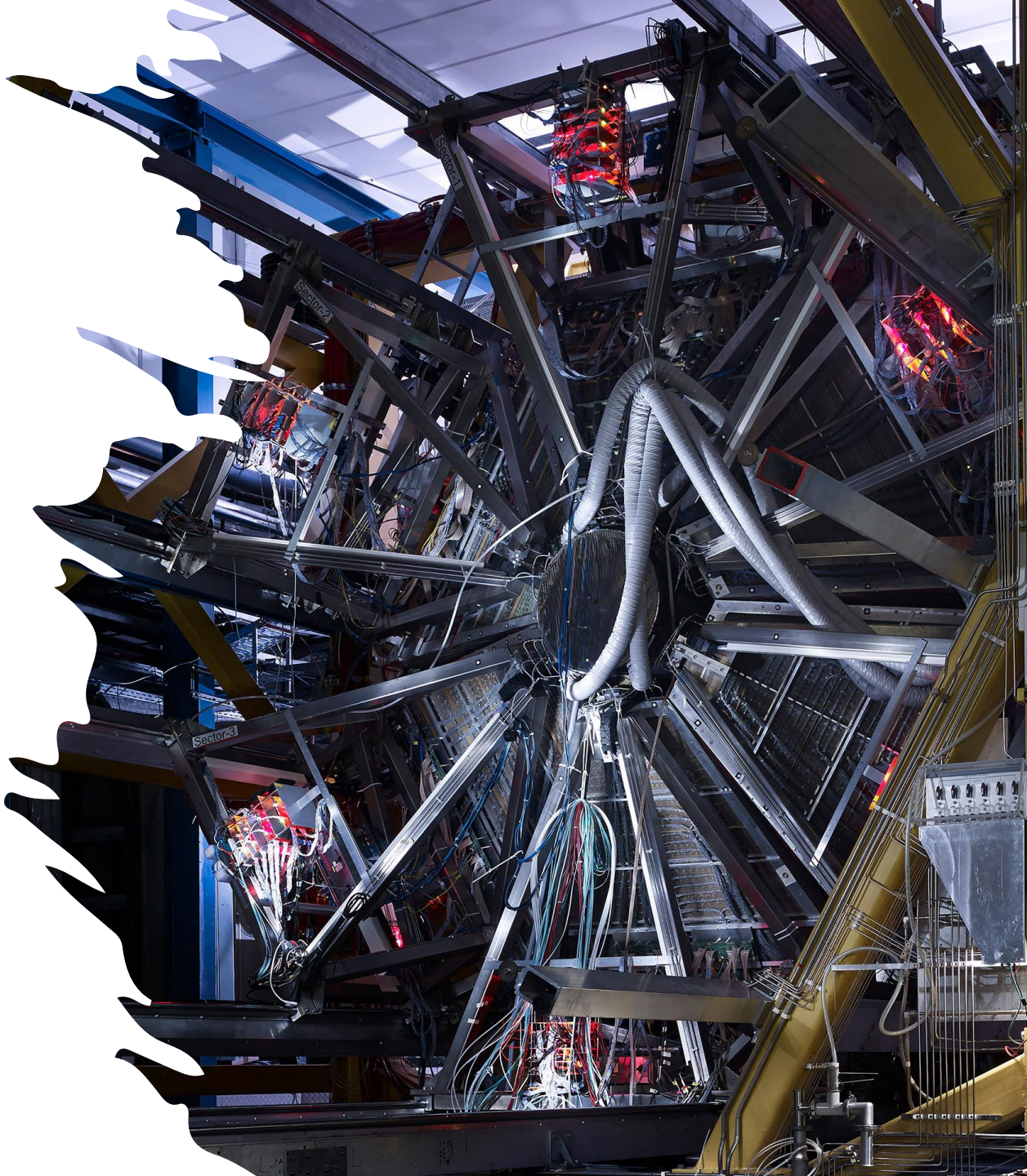
Практическая задача: найти уравнения всех прямых, которые пересекают четыре данные.



Физический подход

Практическая задача: найти уравнения всех прямых, которые пересекают четыре данные.

Зачем?

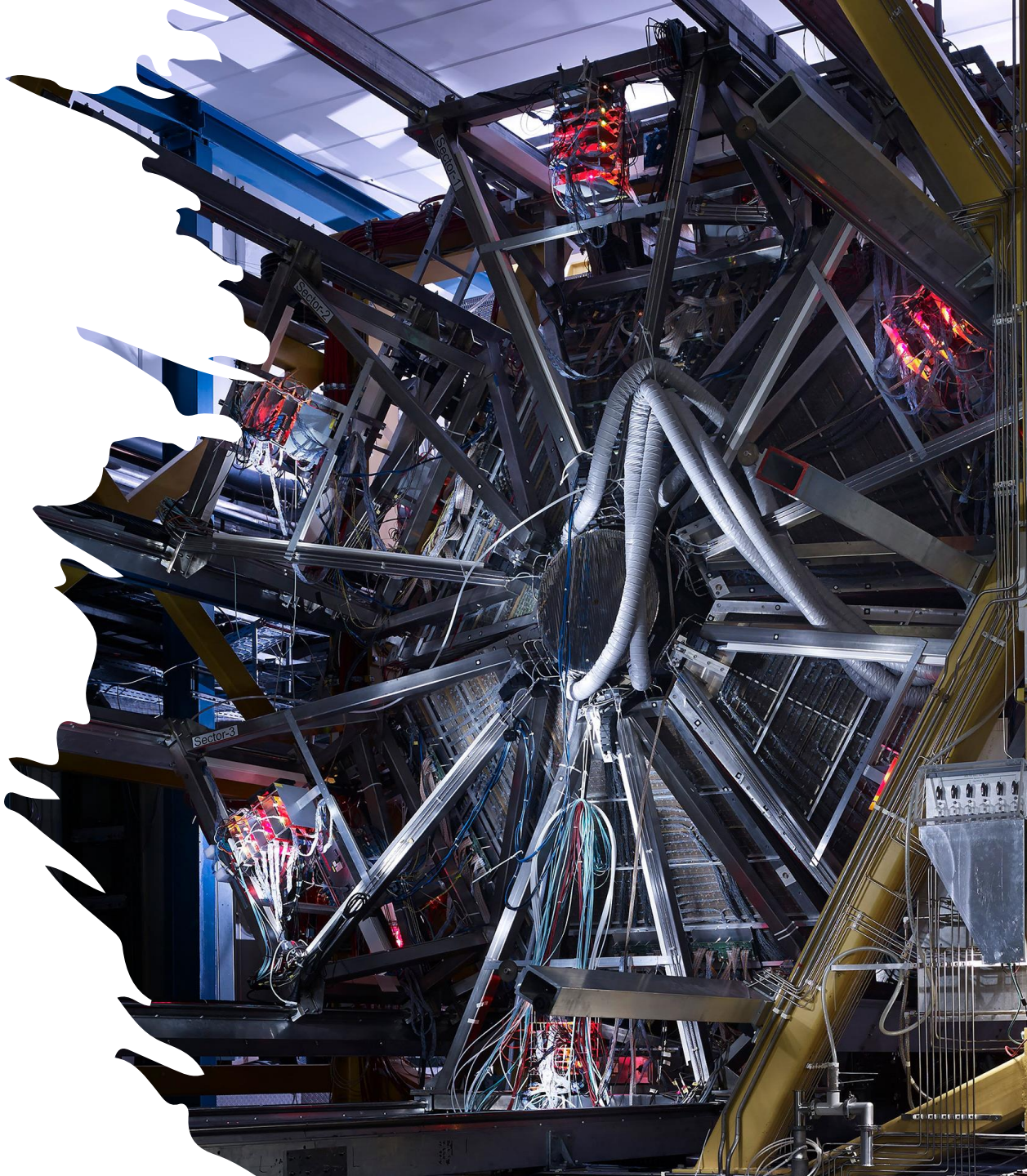


Физический подход

Практическая задача: найти уравнения всех прямых, которые пересекают четыре данные.

Зачем?

Для трекинга частиц с помощью прямолинейных детекторов.

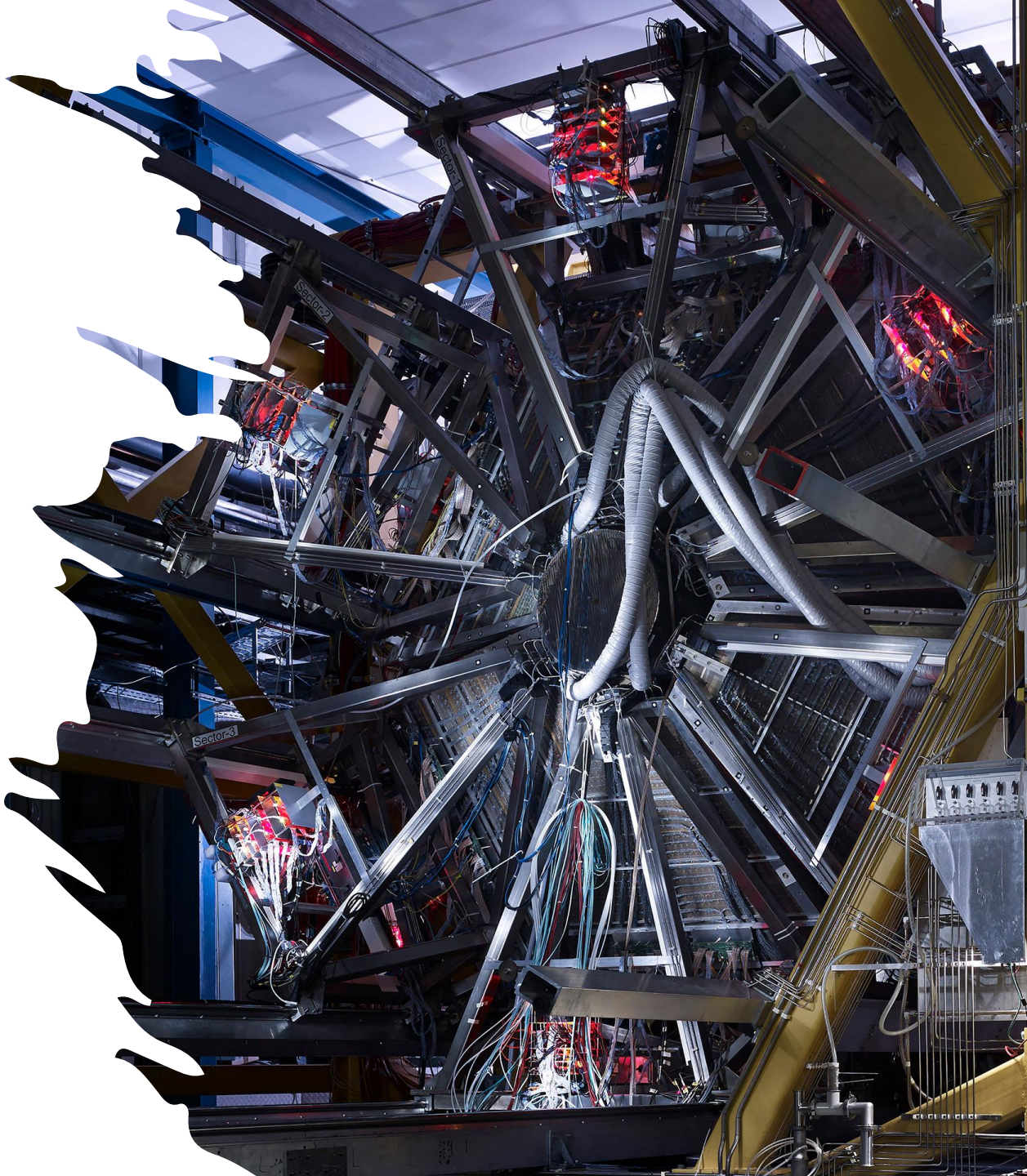


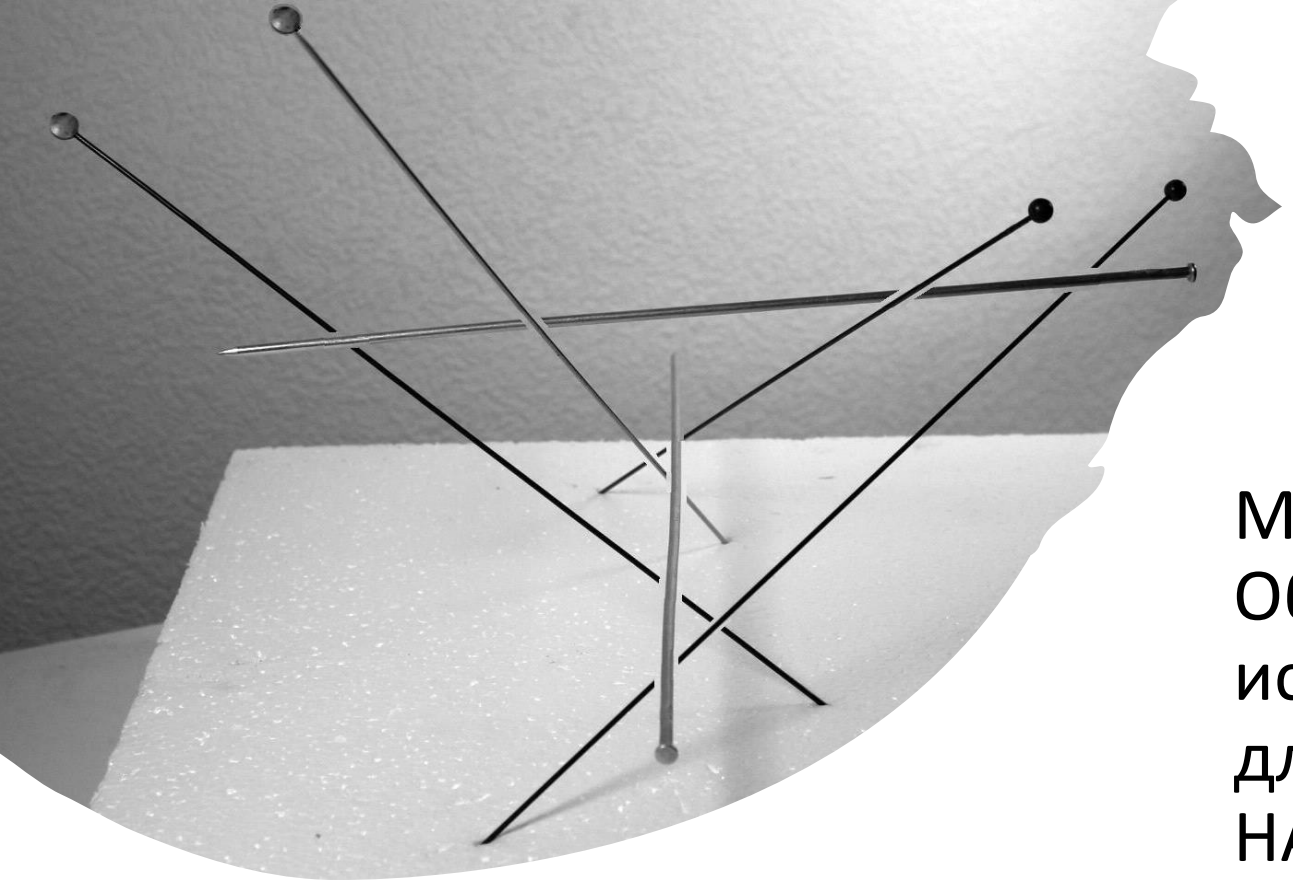
Физический подход

Практическая задача: найти уравнения всех прямых, которые пересекают четыре данные.

Зачем?

Для трекинга частиц с помощью прямолинейных детекторов (то есть детекторов с линейными чувствительными элементами).





Физический подход

Метод разработан сотрудниками Объединённого института ядерных исследований в Дубне и используется для обработки данных спектрометра HADES (High-Acceptance Dielectron Spectrometer).

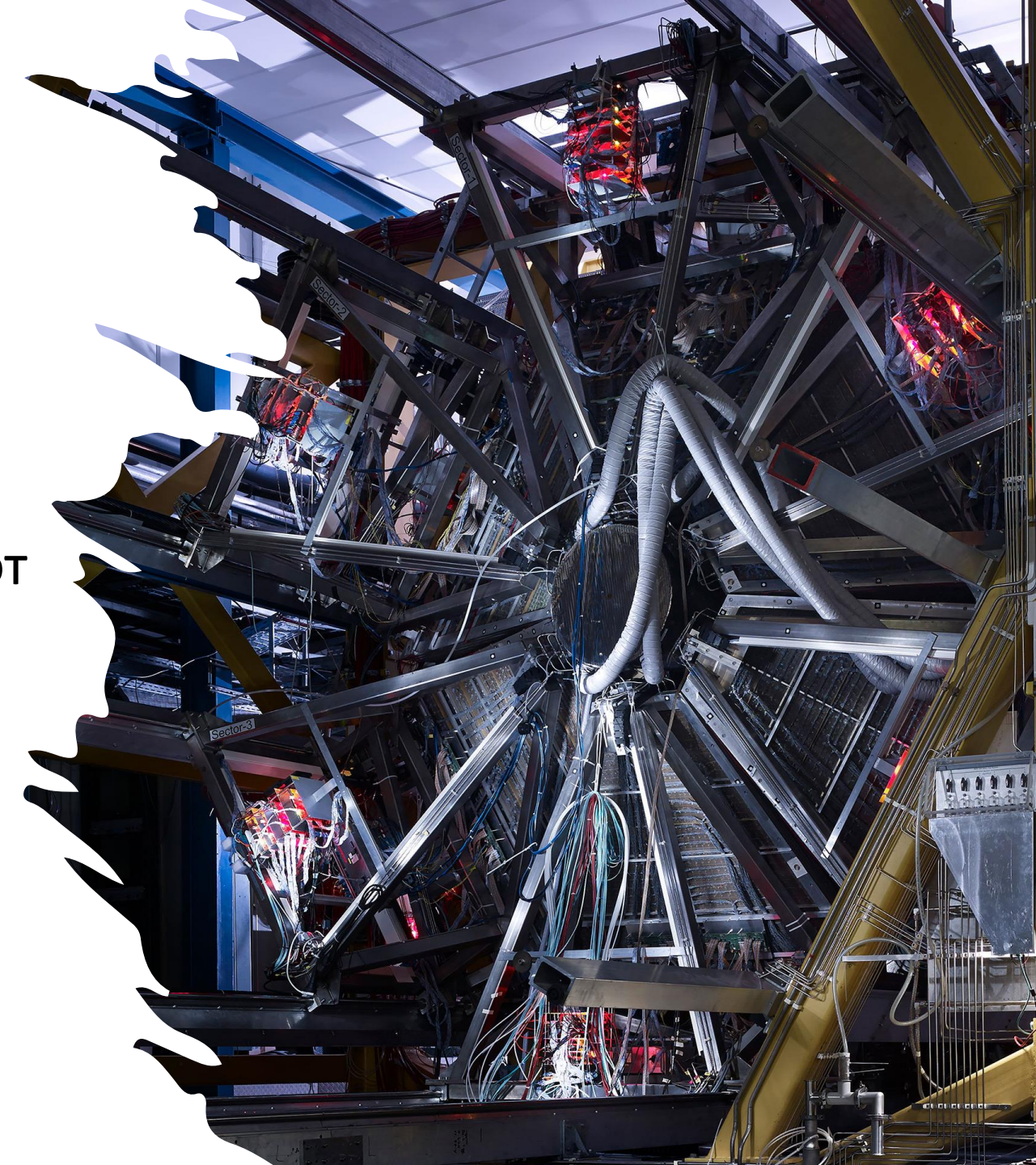
On the initial approximation of charged particle tracks in detectors with linear sensing elements

A.V. Belyaev [a], S.A. Avramenko [a], G. Agakishiev [a,*], V.N. Pechenov [a,b], V.S. Rikhvitsky [a]

[a] *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*
[b] *GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung, 64291 Darmstadt, Germany*

Физический подход

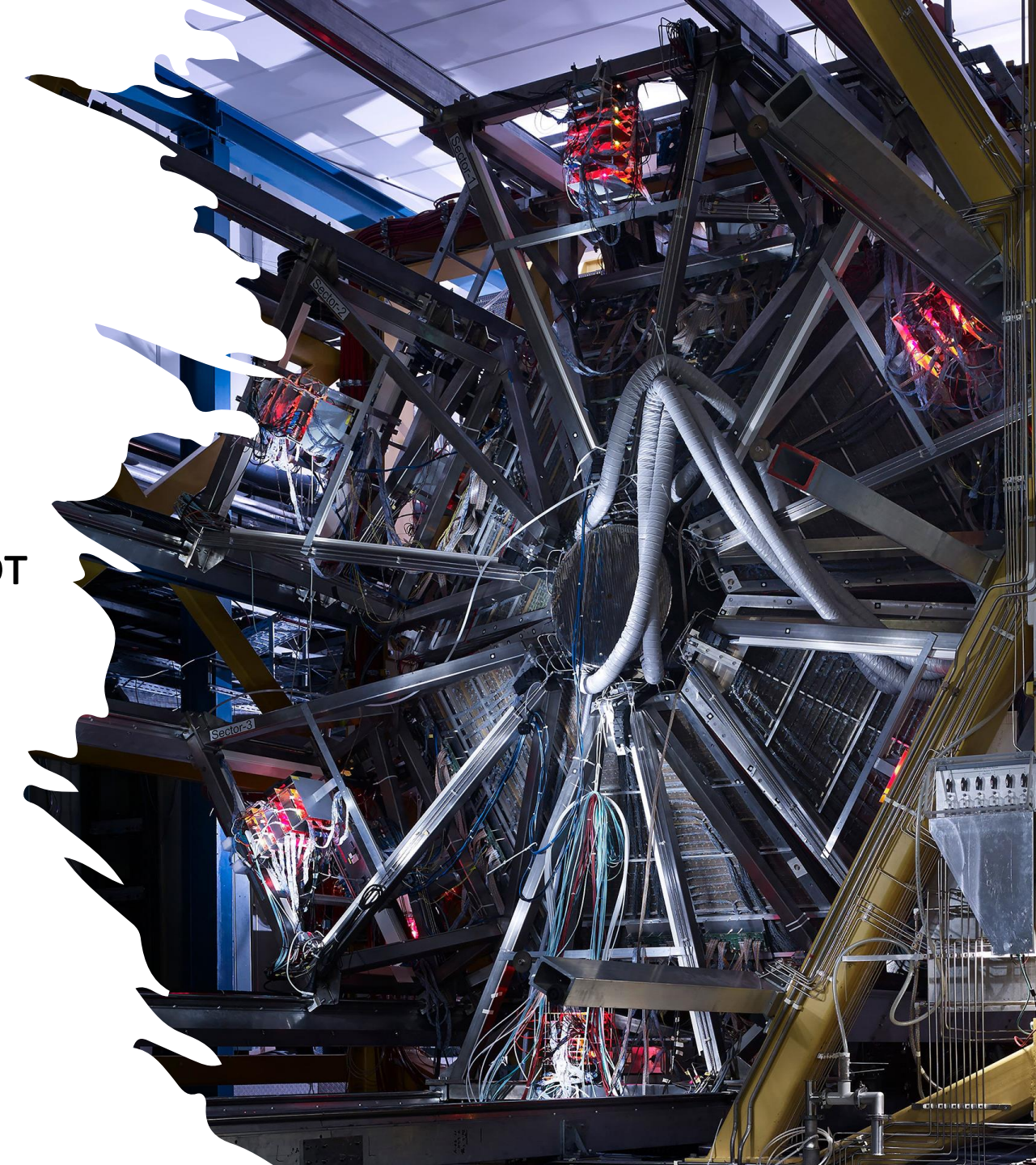
Практическая задача: найти уравнения всех окружностей в пространстве, которые пересекают шесть данных прямых.



Физический подход

Практическая задача: найти уравнения всех окружностей в пространстве, которые пересекают шесть данных прямых.

Зачем?

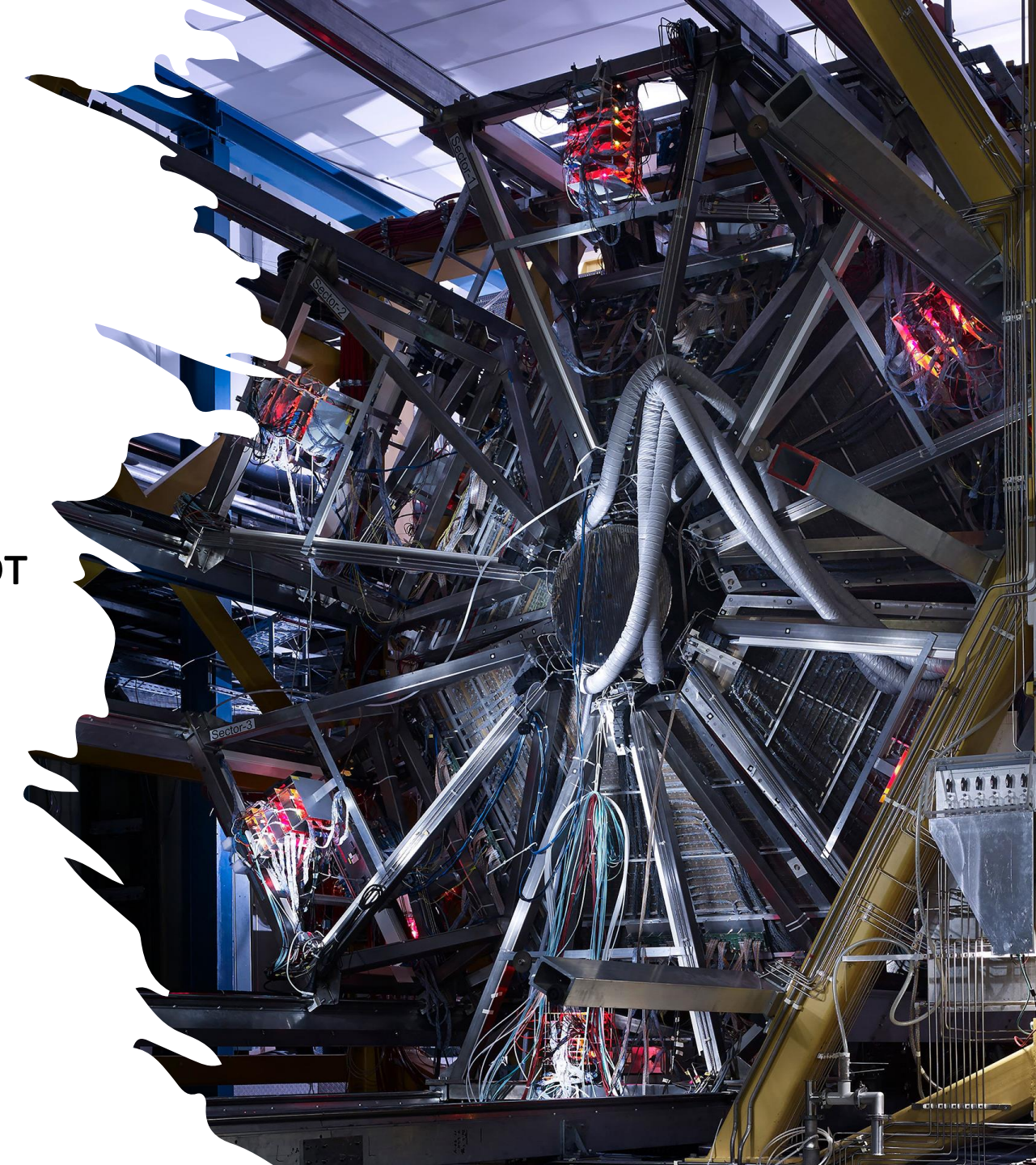


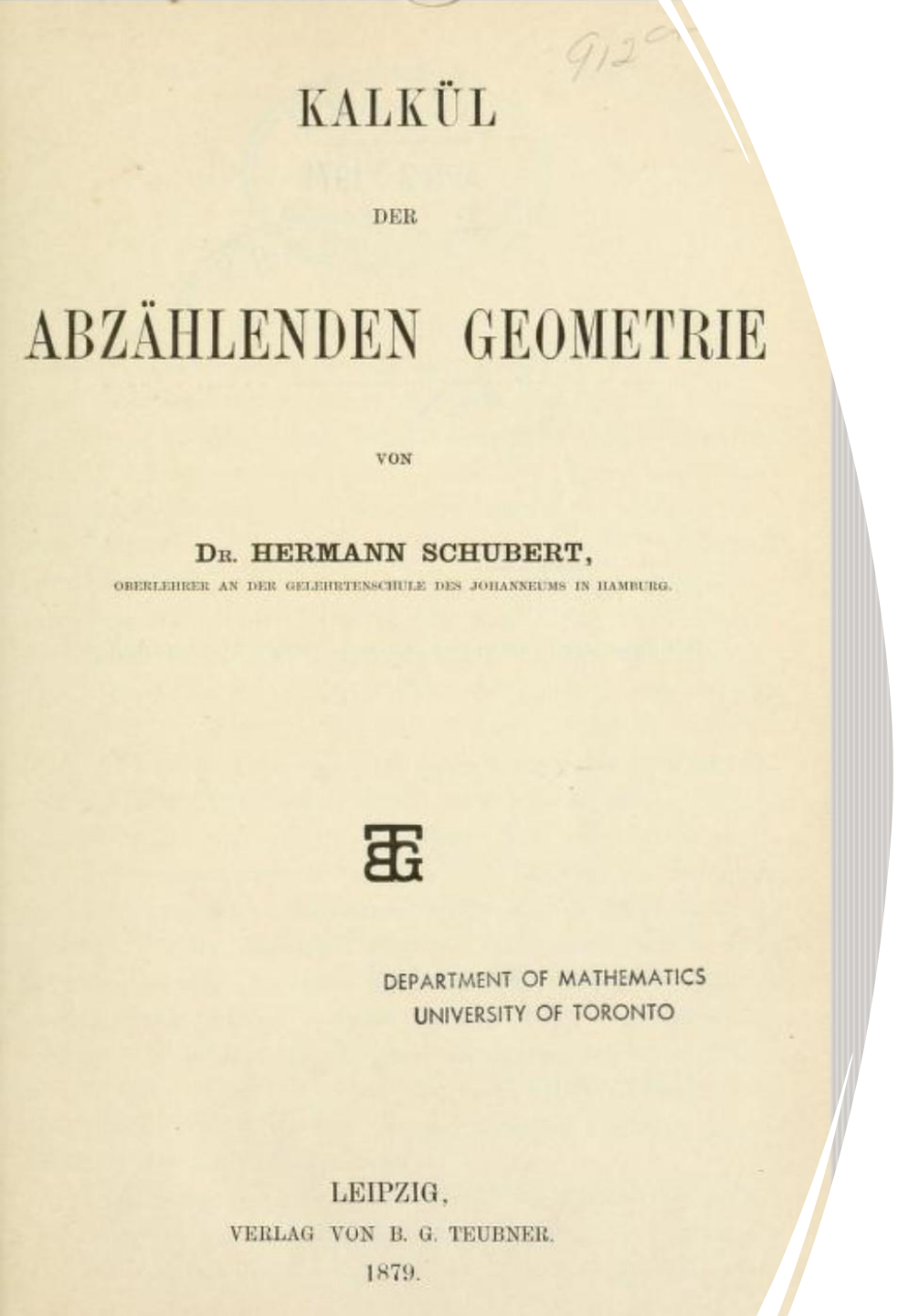
Физический подход

Практическая задача: найти уравнения всех окружностей в пространстве, которые пересекают шесть данных прямых.

Зачем?

Для трекинга частиц с помощью прямолинейных детекторов в электромагнитном поле.





KALKÜL

DER

ABZÄHLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. HERMANN SCHUBERT,

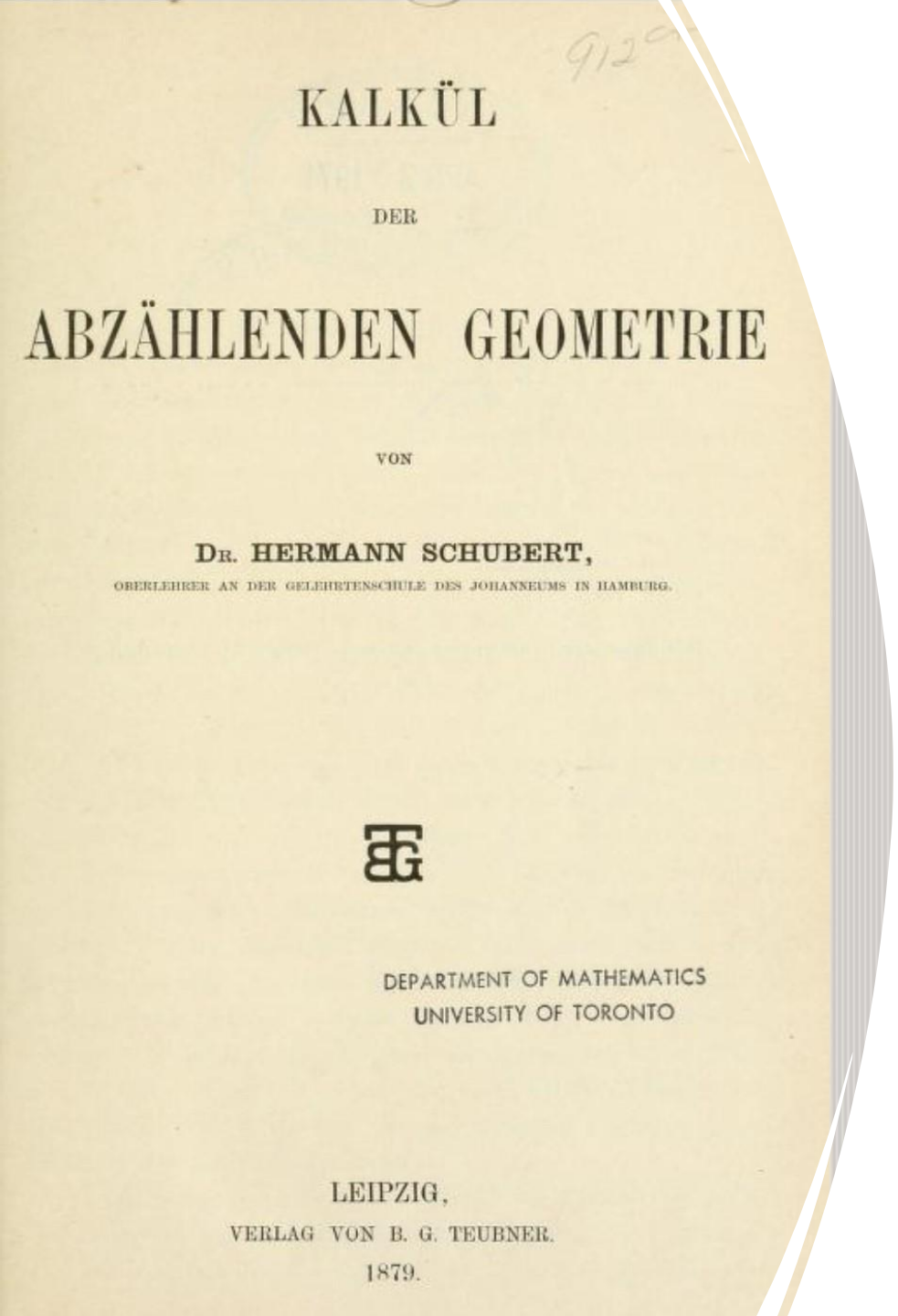
OBERLEHRER AN DER GELEHRTENSCHULE DES JOHANNEUMS IN HAMBURG.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Исчисление Шуберта

2, 8, 27, 92, 2875, 3264, 5 819 539 783 680


KALKÜL

DER

ABZÄHLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. HERMANN SCHUBERT,

OBERLEHRER AN DER GELEHRTENSCHULE DES JOHANNEUMS IN HAMBURG.

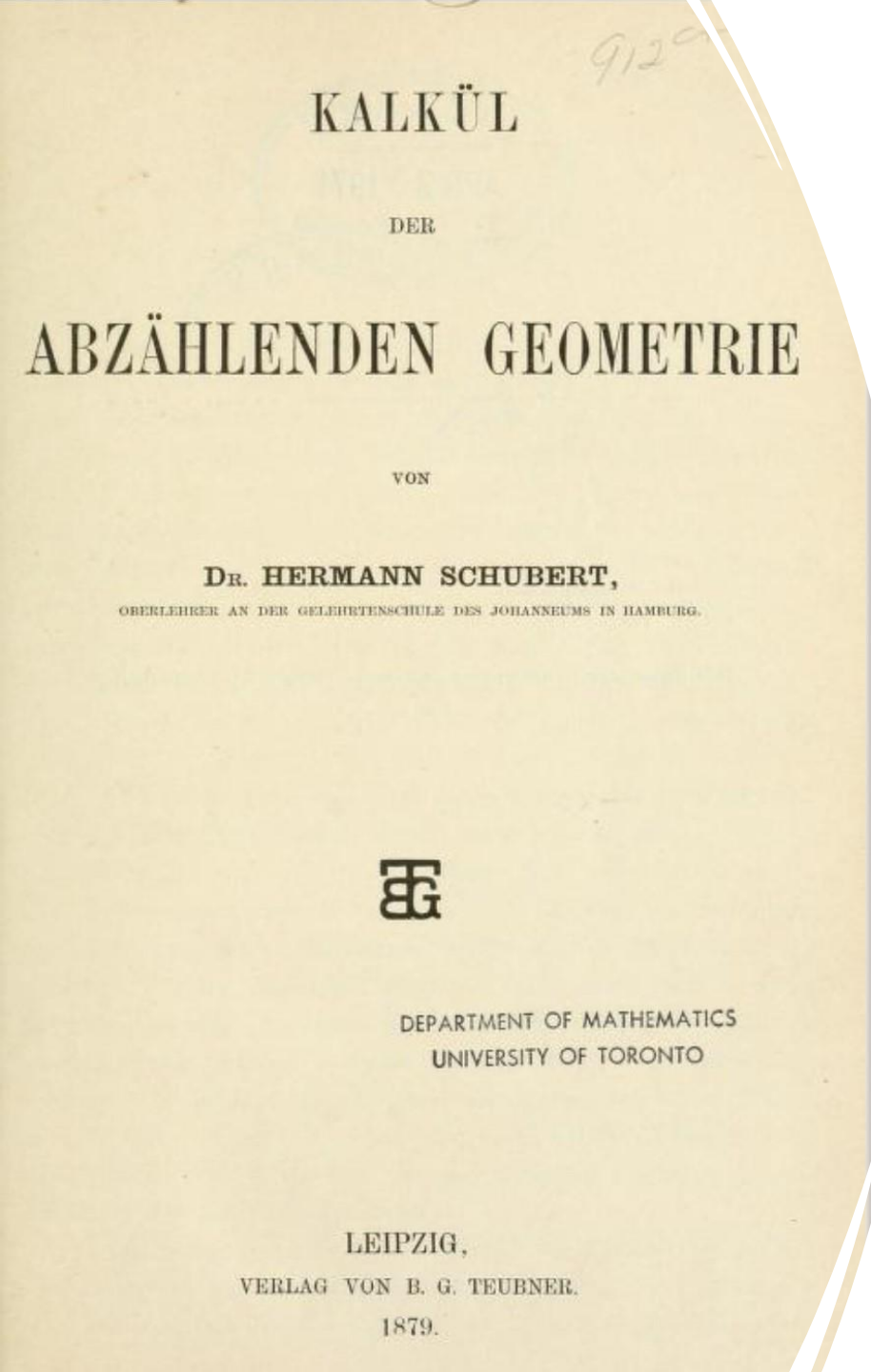
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Исчисление Шуберта

2, 8, 27, 92, 2875, 3264, 5 819 539 783 680

Что это за числа?



KALKÜL

DER

ABZÄHLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. HERMANN SCHUBERT,

OBERLEHRER AN DER GELEHRTENSCHULE DES JOHANNEUMS IN HAMBURG.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Исчисление Шуберта

2, 8, 27, 92, 2875, 3264, 5 819 539 783 680

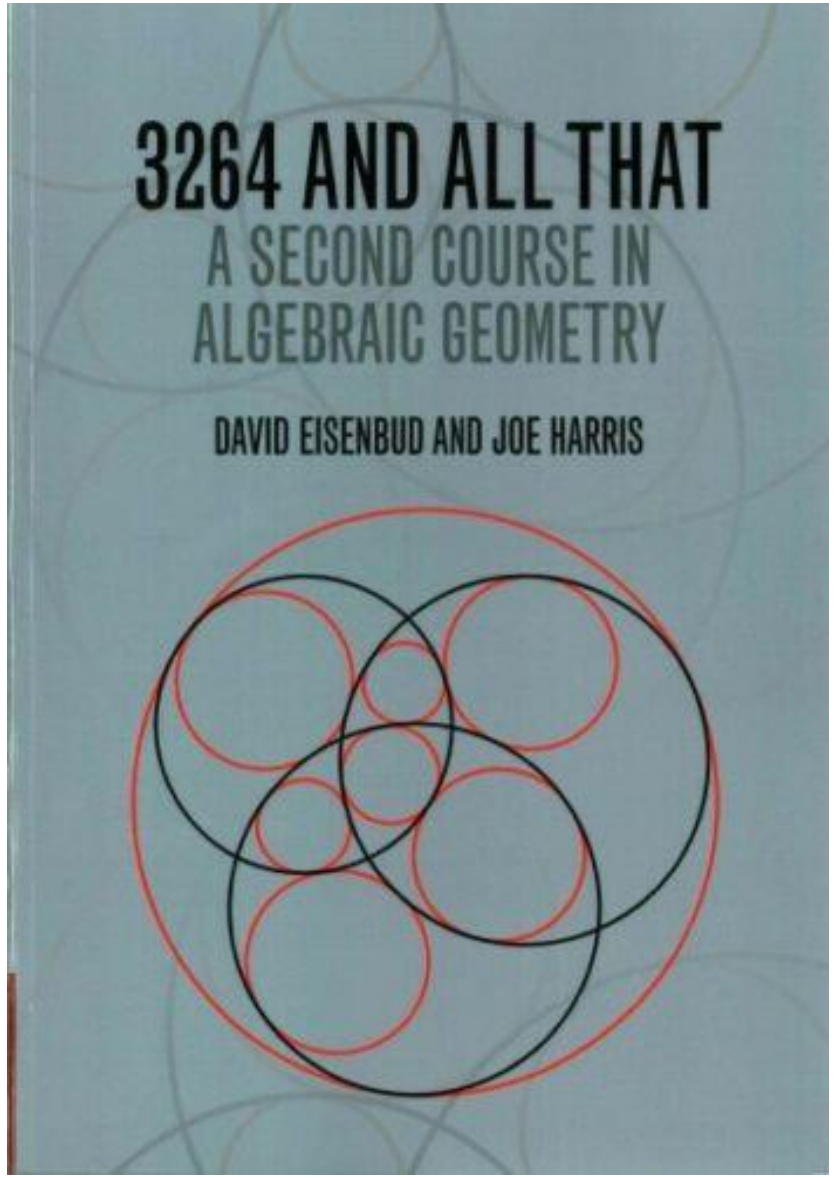
Что это за числа?

Это ответы на известные задачи исчислительной геометрии.

Исчисление Шуберта

«Несмотря на отсутствие строгого обоснования, исчислительная геометрия в XIX веке достигла внушительных высот: например, Шуберт, ..., посчитал количество скрученных кубик, которые касаются 12 квадрик – и получил правильный ответ (5,819,539,783,680). Это всё равно что с завязанными глазами посадить аэробус!»

Дэвид Айзенбад и Джо Харрис,
«3264 и всё такое»



«27 прямых на кубике»

Задача: Сколько прямых лежит на кубической поверхности?

Модель из университета Токио

«27 прямых на кубике»

Задача: Сколько прямых лежит на кубической поверхности?

Пример: диагональная кубика Клебша (также известная как икосаэдральная кубика Клейна) содержит ровно 27 прямых.

Модель из университета Токио

2875 и всё такое

Задача: Сколько прямых лежит на трёхмерной квинтике Q в четырёхмерном пространстве?

Ответ: 2875 (XIX век, Шуберт и все-все-все)

2875 и всё такое

Задача: Сколько прямых лежит на трёхмерной квинтике Q в четырёхмерном пространстве?

Ответ: 2875 (XIX век, Шуберт и все-все-все)

Задача: Сколько коник лежит на Q?

Ответ: 609250 (1985, Шелдон Катц)

2875 и всё такое

Задача: Сколько прямых лежит на трёхмерной квинтике Q в четырёхмерном пространстве?

Ответ: 2875 (XIX век, Шуберт и все-все-все)

Задача: Сколько коник лежит на Q?

Ответ: 609250 (1985, Шелдон Катц)

Задача: Сколько скрученных кубик лежит на Q?

Ответ: 317206375 (1991, Еллингсруд-Штройме [G.Ellingsrud-S.A.Strømme])

2875 и всё такое

- 1991 – физики точно предсказали количество рациональных кривых любой степени на Q
- 1996 – математики доказали предсказание физиков (теорема о зеркальной симметрии)

A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory ☆

Philip Candelas [1], Xenia C. De La Ossa [1] **, Paul S. Green [2], Linda Parkes [1]

IMRN International Mathematics Research Notices
1996, No. 13

Equivariant Gromov-Witten Invariants

Alexander B. Givental

2875 и всё такое

«...в первой трети (XX) века математика и физика развивались параллельно и через некоторое время перестали обращать друг на друга внимание. В 40-х годах Фейнман написал свой замечательный континуальный интеграл..., — вообразите себе что-то вроде Эйфелевой башни, которая висит в воздухе, без фундамента с точки зрения математики. ...И оказалось парадоксальным и чрезвычайно для меня приятным образом, что мы стали учиться у физиков в большей степени, чем они у нас.»

Юрий Иванович Манин, «Не мы выбираем математику своей профессией, а она нас выбирает»

Якоб Штейнер

3264 и всё такое

Задача Штейнера: Сколько гладких коник касаются пяти данных коник?

Ответ Штейнера: 7776

Якоб Штейнер

3264 и всё такое

Задача Штейнера: Сколько гладких коник касаются пяти данных коник?

Ответ Штейнера: 7776 (неверный!)

Ответ Шаля: 3264

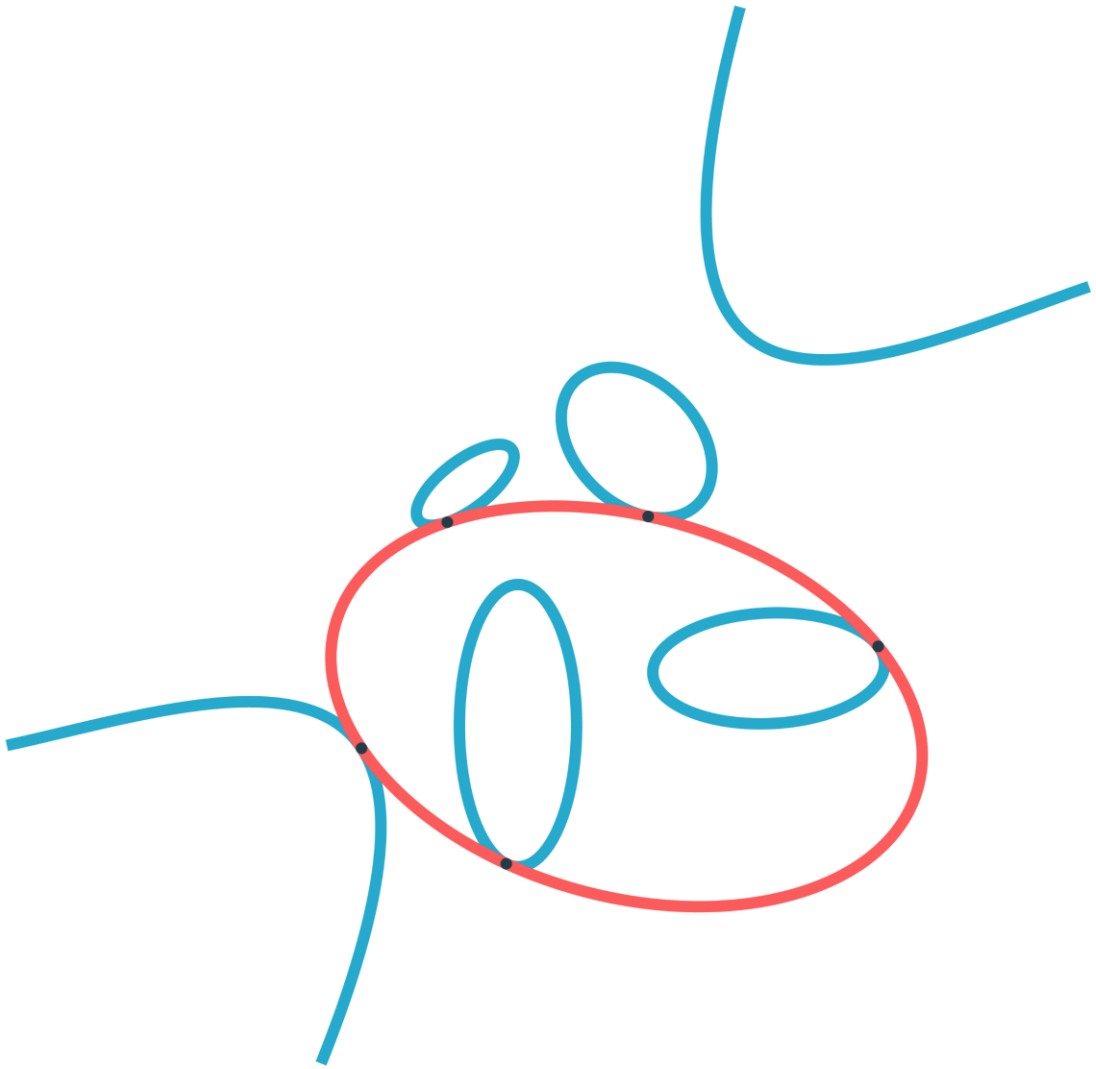
Мишель Шаль

3264 и всё такое

Задача Штейнера: Сколько гладких коник касаются пяти данных коник?

Ответ Штейнера: 7776 (неверный!)

Ответ Шаля: 3264



3264 и всё такое

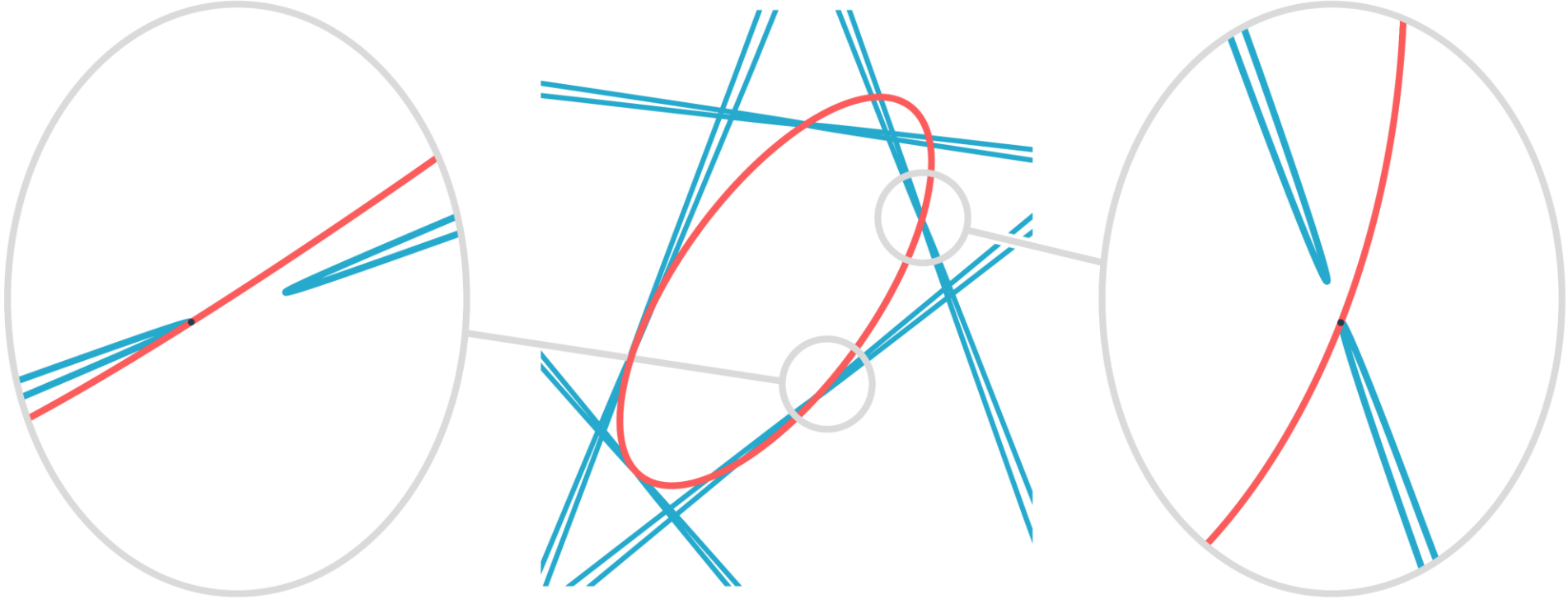
Синие коники даны.

Красная коника касается всех пяти.

https://www.juliahomotopycontinuation.org/3264/

3264 и всё такое

Конфигурация из пяти коник, реализующая максимальный ответ (3264)



https://www.juliahomotopycontinuation.org/3264/

3264 и всё такое

Упражнение: *найдите, сколько гладких коник проходит через (5-i) данных точек и касается i прямых для всех i=0,…,5.*

3264 и всё такое

Упражнение: *найдите, сколько гладких коник проходит через (5-i) данных точек и касается i прямых для всех i=0,…,5.*

Условия на коники:

- μ – условие, что коника проходит через данную точку;
- ν – условие, что коника касается данной прямой;
- λ – условие, что коника касается данной коники;

3264 и всё такое

Упражнение: *найдите, сколько гладких коник проходит через (5-i) данных точек и касается i прямых для всех i=0,…,5.*

Условия на коники:

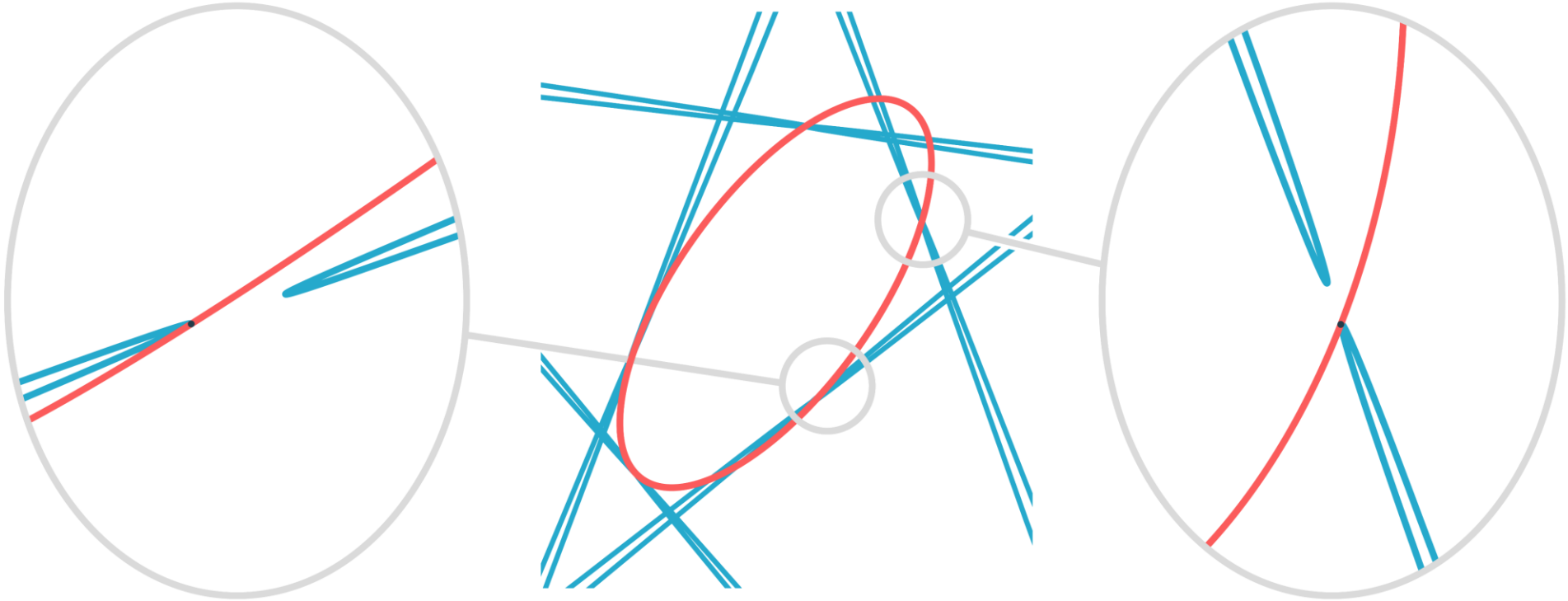
- μ – условие, что коника проходит через данную точку;
- ν – условие, что коника касается данной прямой;
- λ – условие, что коника касается данной коники;

Исчисление условий:

- сумма условий – «или»
- произведение условий – «и»

3264 и всё такое

Правдоподобная гипотеза: $\lambda=2(\mu+\nu)$



https://www.juliahomotopycontinuation.org/3264/

Фундаменты исчисления Шуберта

- Алгебраическая топология (кольцо когомологий гладкого многообразия)
- Алгебраическая геометрия и теория пересечений (кольцо Чжоу и классы Чжэня [Черна])
- Теория представлений и теория инвариантов (кольцо условий Де Кончини-Прочези сферического однородного пространства)

Фундамент(ы) исчисления Шуберта

- Алгебраическая топология (кольцо когомологий гладкого многообразия)
- Алгебраическая геометрия и теория пересечений (кольцо Чжоу и классы Чжэня [Черна])
- Теория представлений и теория инвариантов (кольцо условий Де Кончини-Прочези сферического однородного пространства)

У нас можно всему этому научиться! И многому другому...

Спасибо за внимание!

Презентацию и другие материалы по исчислению Шуберта можно найти на сайте:

me.hse.ru/valkir