

Экзамен

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Оценка									

Продолжительность экзамена — 3 часа. На полный балл достаточно решить любые 6 задач. Можно пользоваться любыми неинтерактивными материалами. Если используете в решении теорему без доказательства, то приведите точную формулировку теоремы и ссылку на источник, где она доказывается.

Задача 1. Решите уравнение $4x = 1$ в кольце целых 7-адических чисел \mathbb{Z}_7 .

Задача 2. Вычислите

$$j \left(\frac{8 + 13i}{5 + 8i} \right) \text{ и } j \left(\frac{2023 + i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Задача 3. Для целых a и b обозначим через $P_{a,b}$ множество всех простых натуральных чисел вида $ak + b$, где $k \in \mathbb{Z}$. Определим функцию $g_{a,b}(s)$ вещественной переменной $s > 1$ по формуле:

$$g_{a,b}(s) := \sum_{p \in P_{a,b}} \frac{1}{p^s}.$$

Вычислите

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{g_{8,7}(s)}{g_{4,1}(s)}.$$

Задача 4. Какие простые числа представляются в виде $x^2 + 3y^2$ для целых x и y ?

Задача 5. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \dots, 2023^{1729}$ на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе было равно произведению чисел в другой группе?

Задача 6. Вычислите $\zeta(6)$.

Задача 7. Эллиптическая кривая над \mathbb{Q} задана уравнением

$$y^2 + xy + y = x^3 - x^2 - 3x + 3,$$

в качестве нулевого элемента выбрана бесконечно удалённая точка. Через P обозначим точку $(1, 0)$ на кривой. Найдите порядок циклической подгруппы, порождённой точкой P .

Задача 8. Пусть $p = 2^{2^k} + 1$ — простое число Ферма. Какова вероятность того, что три идущих подряд символа Лежандра в последовательности

$$\left(\frac{1}{p} \right), \left(\frac{2}{p} \right), \dots, \left(\frac{p-1}{p} \right)$$

все равны -1 ?