Экзамен

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Итог
Оценка									

Продолжительность экзамена — 3 часа. На полный балл достаточно решить любые 6 задач. Можно пользоваться любыми неинтерактивными материалами. Если используете в решении теорему без доказательства, то приведите точную формулировку теоремы и ссылку на источник, где она доказывается.

Задача 1. Сколько решений имеет уравнение $x^2 - 7 = 0$ в кольце $\mathbb{Z}_3$ целых 3-адических чисел?

Задача 2. Сколько решений имеет уравнение $x^2 - 7777 = 0$ в конечном поле $\mathbb{F}_p$ из $p = 2027$ элементов?

Задача 3. Обозначим через P множество всех простых натуральных чисел. Вычислите предел

$$\lim_{s \to +a} \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

при (а) $a = 1$; (б) $a = 2$.

Задача 4. Вычислите

$$j\left(\frac{2023 + i\sqrt{163}}{2}\right).$$

Задача 5. Пусть $\mathcal{O}_K$ — кольцо целых мнимого квадратичного поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Найдите плотность кольца $\mathcal{O}_K$, рассматриваемого как решётка относительно нормы $(x, x) = x\bar{x}$. Для какого d плотность максимальна?

Задача 6. Пусть $p = 2^{2^k} + 1$ — простое число Ферма. Напомним, что сумма Якобшталя для $a \in \mathbb{F}_p$ определяется по формуле:

$$I(a) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p \setminus 0} \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x^2 + a}{p}\right).$$

Вычислите $I(-1)^2$.

Задача 7. Эллиптическая кривая над $\mathbb{Q}$ задана уравнением

$$y^2 = x^3 + 1,$$

в качестве нулевого элемента выбрана бесконечно удалённая точка. Через P обозначим точку $(2, 3)$ на кривой. Найдите порядок циклической подгруппы, порождённой точкой P.

Задача 8. Разложите на простые идеалы главный идеал (2) в кольце целых поля
(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$; (б) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$.