Семинар 15. Расширения полей

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Лемниската Бернулли)**.** На евклидовой плоскости даны точки F_1 и F_2. Определим кривую Λ как геометрическое множество точек P, таких что

$$PF_1 \cdot PF_2 = c^2,$$

где c — это половина расстояния между F_1 и F_2.

(а) Предъявите такую систему координат (в ортонормальном базисе), что Λ задаётся уравнением

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

(б) Проверьте, что лемнискатические синус и косинус удовлетворяют тождеству:

$$\mathrm{sl}^2(r)\mathrm{cl}^2(r) + \mathrm{sl}^2(r) + \mathrm{cl}^2(r) = 1$$

Подсказка: используйте эллиптический интеграл для длины дуги:

$$\mathrm{arcsl}(r) = \int_{t=0}^{r} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

(в) Обозначим через ϖ отношение длины лемнискаты к её диаметру. Найдите степень расширения полей $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(i, \mathrm{sl}(\frac{\varpi}{4}))$.

Задача 2. Найдите группу автоморфизмов поля $K \subset \mathbb{C}$, полученного присоединением к $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена

(а) $x^n - 1$;

(б) $x^3 - 2$;

(в) $x^3 + x^2 - 2x + 1$.

Задача 3. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — подполе, полученное присоединением к $\mathbb{Q}$ всех корней неприводимого многочлена $x^3 + px + q \in \mathbb{Q}[x]$. Найдите группу автоморфизмов поля (ответ будет зависеть от p и q).