Семинар 16. Квадратичные формы и решётки

Введение в теорию чисел, весенний семестр 2023 г.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Докажите, что любая квадратичная форма на конечномерном векторном пространстве над полем рациональных чисел обладает ортогональным базисом.

Задача 2. Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, причём $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$.

(а) Найдите группу $\mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*2}$.

(б) Зафиксируем какой-нибудь квадратичный невычет $a \in \mathbb{F}_q^*$. Докажите, что каждая невырожденная квадратичная форма ранга n над $\mathbb{F}_q$ эквивалентна одной из двух форм:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + ax_n^2.$$

(Если общий случай вызывает сложности, начните со случая $q = 3$.)

Задача 3. Пусть $C \subset \mathbb{F}_2^8$ — расширенный код Хэмминга, то есть подпространство, порождённое столбцами матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим целочисленную решётку $L \subset \mathbb{R}^8$ условием, что целочисленный вектор $(x_1, \ldots, x_8)^t$ лежит в L тогда и только тогда, когда $(x_1 \pmod 2, \ldots, x_8 \pmod 2)^t$ лежит в C. Постройте изоморфизм между L и решёткой E_8[1].

Задача 4 (*). Найдите все натуральные решения уравнения

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = m^2.$$

[1] Рецепт можно найти в ответе Ноама Элкиса https://math.stackexchange.com/questions/377918/isomorphism-between-e-8-lattice-and-lattice-defined-by-extended-hamming-code.