

Математика и Нематематика

Валентина Кириченко

Давно хотела написать о высоком – о роли математики и математиков в постижении трансцендентных истин. Речь идёт об истинах, которые не укладываются в рамки рационального (и алгебраического) мышления. С одной стороны, математика в человеческом сознании прочно ассоциируется с логикой, строгими доказательствами и беспристрастным анализом данных. С другой стороны, многие математические абстракции поначалу выносят мозг, настолько они расходятся с обычным человеческим опытом. С третьей стороны, математические исследования часто мотивируются вовсе не теми целями и задачами, о которых пишут в грантовых заявках, а такими нефинансовыми материями как понимание, озарение, новая интуиция, красота и единство. Хотя в научной статье сейчас вряд ли кто прокомментирует своё открытие словами «mi par di veder un gran lume», как это сделал один известный математик XVII века, многие современные математики используют не менее проникновенные метафоры в своих блогах, лекциях, фильмах и других нерецензируемых произведениях.

Основная цель моего художественного эссе – привлечь внимание к тем работам математиков по НЕматематике, которые могут быть интересны широкому кругу мыслителей, независимо от их уровня математической культуры. Не претендуя на полноту изложения, я выбрала несколько тем, которые стабильно всплывают в разговорах математиков, когда у нас возникает желание или необходимость выйти за пределы своей зоны компетентности. Например, на математических школах для студентов иногда устраивают вечер вопросов и ответов на тему «Что такое математика, и кто такие математики». Тогда в президиуме садятся несколько взрослых математиков (среди которых, если повезёт, может оказаться пара женщин) и отвечают на вопросы из зала (надо отметить, что в зале гендерный дисбаланс обычно не столь явно выражен, как в президиуме). Вопросы могут быть самые разные – от утилитарных до философских. Ответы на один и тот же вопрос тоже бывают самые разные, и это никого не смущает.

Математикам приходится вести и не столь благожелательные диспуты по вопросам, не сводящимся к чистой математике. Такие диспуты вызывают у меня стойкую ассоциацию с «парадоксами» из научной фантастики, которые прекрасно помогают выводить из строя андроидов, роботов и прочие искусственные интеллекты. Несчастному созданию обычно предлагают на выбор два противоречащих друг другу мнения, причём каждое мнение подкрепляется вполне разумными аргументами. В частности, в одном из относительно недавних публичных диспутов на тему (не)уместности публикации математической статьи, затрагивающей гендерные вопросы, прозвучал такой аргумент: «...нельзя позволить, чтобы стремление к большей справедливости и равенству влияло на бесстрастные академические исследования. Даже если выводы из логического рассуждения неприятны, само рассуждение должно быть принято или отвергнуто само по себе, независимо от своей желанности или политической пользы.» Не успела я всей душой проникнуться этими рассудительными словами, как наткнулась на другой, не менее

разумный аргумент: «...бесполезно пытаться отделить математические исследования от «образовательных, социальных и политических» факторов, которые формируют жизнь каждого математика-человека, без исключения» (МХ, пост 08.02.2022). Тут я порадовалась, что я человек, а не андроид.

Желание и интерес – неотъемлемые составляющие математической деятельности. Часто можно услышать от математика, что «эта задача меня не возбуждает», а над другой задачей он готов думать всю жизнь. Это вполне себе сочетается с бесстрастным отношением к решению задачи не как к процессу, а как к конечному продукту математических исследований. Как бы нам ни хотелось найти решение, если мы видим в своих аргументах даже незначительную «дырку», мы честно признаём, что решения пока нет. Иначе какие же мы математики? При этом выход за рамки чистой математики часто лишает нас чудесной способности сочетать желание с бесстрастием. Да и логически невозможно примирить враждующие стороны при обсуждении вопроса с бинарным ответом, вроде того, опубликовать статью или не опубликовать?

Иногда в качестве паллиатива предлагают не вести диалог с теми, кто «не разделяет мои базовые ценности». Я с такой позицией категорически не согласна. Во-первых, базовые ценности могут быть так глубоко запряты внутри человека, что их не всегда можно правильно идентифицировать по его публичным декларациям. Иначе как «с помощью беззлобных вопросов и ответов» истинные ценности на поверхность не вытащишь и (не)совпадение оных не установишь. Во-вторых, даже если в процессе беседы обнаружилось реальное расхождение в базовых ценностях, ценность самой беседы это нисколько не снижает. Чтобы проиллюстрировать свой тезис, я буду перемежать авторский текст фрагментами достаточно типичной беседы математиков с разными базовыми ценностями.

Первый раунд (о вере)

В а н я. Погодка тут только, конечно, та еще. Практически с моего прилета льет. И холодно, как в Москве :) (А я, конечно, зонтик с собой не взял: какой идиот едет в Иерусалим с зонтиком?) Но вообще это даже красиво, я не жалуясь: камни старого города плачут, Виа Долороса... А поселить меня, кстати, решили в монастыре.

А н н а. Просите второе одеяло. В монастырях Иерусалима жутко холодно по ночам.

А н т о н. В православных, мусульманских, католических или иудейских?

А н н а. Буквально во всех)) Если дом старый (до 21 века), там очень холодно зимой. Чем красивее и аутентичнее дом, тем холоднее.

В а н я. А бывают иудейские или мусульманские монастыри?

А н т о н. У суфистов бывают, вроде.

А н н а. В иудаизме молодому человеку положено жениться.

А н т о н. Ваня, срочно женитесь на ком-нибудь с домом поновее. Мы откроем сбор средств на приданое.

В а н я. Вот Вы по больному бьете(Тут вообще непонятно, как (и с кем) общаться. К тому же я человек православный, так что вариантов еще меньше.

М а ш а. Так ты правда веришь в бога???

В а л я. Мария, я прошу прощения, что вмешиваюсь, но вера в Бога мне кажется совершенно естественной. Не сочтите за религиозную пропаганду.

М а ш а. С тем, что она достаточно естественна, я даже и не спорю, тут вы совершенно правы! Но для математика мне это кажется удивительным.

В а л я. Я как раз имела в виду, что для математиков вера в Бога достаточно естественна. Например, мои родители учились в одном из первых математических классов в Москве во времена массивованного атеистического воспитания. Со временем почти все их одноклассники стали глубоко верующими людьми (в разных традициях – некоторые обратились в православие, некоторые – в иудаизм, некоторые не принадлежат ни к какой конфессии, но в Бога верят).

М а ш а. А я училась в нынешние времена государственного православия. Тем не менее, я всегда была атеисткой. Я даже в Деда Мороза никогда не верила, не то что в бога. Для меня очень удивительно, что большинство учащихся математического класса стали в итоге глубоко верующими людьми. Математика ведь объясняет нам научную картину мира, а религия – это средневековые/античные сказки. Религия противоречит математике.

В а л я. Я с раннего детства верю в Бога (не помню такого момента, чтобы я не ощущала, что Бог есть), но именно православную традицию я только в последние пару лет начала осознавать как наиболее глубоко отражающую мои убеждения (до этого мои убеждения были «просто христианство» как у К.С.Льюиса). На меня сильно повлиял богословский семинар, который вёл профессиональный математик.

Я глупо выразилась, конечно, это не православие отражает мои убеждения, а наоборот, мои убеждения – несовершенный образ православного учения.

А н н а. Среди религиозных людей много биологов и лингвистов, что уж про математиков говорить :)

С а ш а. Религия противоречит математике. — а чем же? Это не риторический вопрос, я именно никогда не мог понять людей, которые так утверждают. Чтобы далеко за

примерами не ходить, Кантор и Генцен были глубоко верующими людьми. Из современников во Франции: Лаура Сан-Реймон – церковноверующий католик.

Н а т а ш а. Мария, согласна с Вами. Тоже не понимаю, как можно верить в сказки и исполнять ритуалы.

А н о н и м. Математика далека от «(естественно-)научной картины мира», которая довольна ограничена и мало что объясняет. Математика вообще ставит под сомнение понятие «истины» и тем самым открывает глаза на возможность мистического опыта и познания.

М а ш а. У меня вопрос к христианам в этом чате: неужели вы верите во всё, что написано в Библии (а иначе какие вы христиане)? Что Вселенная была сотворена 6 тысяч лет назад в течение нескольких дней сразу в том виде (за исключением человеческой цивилизации), в котором она существует ныне, что Иисус и апостолы совершали чудеса и прочий бред. Я легко могу себе представить, как в такое может верить неграмотный крестьянин, но вот чтобы профессиональный математик в такое верил! Это моему уму непостижимо. Не говоря уже о том, что, скорее всего, никто из считающих себя христианином не может пройти описанный в Библии тест на наличие веры хотя бы с горчичное зерно.

П ё т р. Вы очень плохо представляете себе профессиональных математиков и математику.

В а л я. Где это в Библии написано, что Вселенная была сотворена 6 тысяч лет назад? Вообще, вера в написанное в Библии похожа на веру в написанное в книге по математике. Смысл в том, чтобы правильно понять написанное. А не просто повторять наизусть.

Р о д и о н. Я честно говоря слабо представляю, как люди жили 20 лет назад — о чём думали, что делали, что их волновало. Про людей 200 лет назад представления еще более расплывчаты и фантастичны; так что не удивлюсь, если 2000 лет назад они обратно разлагали черепки на глину и огонь (сиречь уменьшали энтропию).

Глава первая (время и пространство)

Как писал один известный богослов, при сотворении мира перед человеком была поставлена архиважная задача. Нужно было устранить пять разделений бытия, возникших в процессе творения, и тем самым привести мир к гармонии. Можно сказать, что сегодняшний праздник соединяет два из этих пяти разделений – между мужским и женским и между чувственнопостигаемым и умопостигаемым. В самом деле, математика связывает вполне наглядные объекты, такие как окружности или шары, с абстрактными концепциями вроде «геометрического места точек, равноудалённых от данной точки». Впрочем, разделение между чувственнопостигаемым и умопостигаемым всё ещё довольно заметно несмотря на успехи математического образования и пропаганды математики.

Многие люди мгновенно отличают окружность на картинке от любой другой фигуры и при этом затрудняются дать точное определение окружности или опознать её по уравнению. Только для математиков нет особой разницы между рисунком, словесным портретом и формулой. Например, филдсовский лауреат прошедшего года, Марина Вязовская, получила фантастически точный результат об оптимальных упаковках шаров в пространствах размерности 8 и 24. Ни увидеть, ни пощупать эти шары нельзя. При этом их неочевидность совершенно не мешает рассуждать о них умозрительно и получать красивые результаты.

Бурное развитие физико-математических наук в Новое время тоже началось с разделения – время и пространство стали рассматриваться независимо. Это оказалось чрезвычайно полезным для создания адекватных математических моделей движения. Если до Галилея никто толком не мог описать, по какой собственно траектории летит ядро, выпущенное из пушки, то теперь каждый школьник скажет, что ядро летит по параболе. Лишь в начале прошлого века теория относительности снова соединила время и пространство в научной картине мира. В наши дни эта связь так глубоко проникла в массовую культуру, что уже и герои блокбастеров при всяком удобном случае поминают с экранов кинотеатров «пространственно-временной континуум».

В начале этого тысячелетия многие известные математики пытались в кратких обзорах объять необъятную историю математики XX века и предсказать её развитие в XXI веке. Хотя миссия эта заведомо невыполнима, читать всё равно интересно. В частности, время и пространство в одном из таких обзоров убедительно сравниваются с алгеброй и геометрией, соответственно. «Геометрия – это, конечно, о пространстве, тут нет вопросов. Когда я смотрю на слушателей в этой аудитории, я могу увидеть очень многое за одну единственную секунду или микросекунду. ...Мне кажется первоосновой, что человеческий разум развился вместе с этим громадным потенциалом и может впитать огромный объём информации за один мгновенный взгляд, а математика использует и совершенствует это. Алгебра, с другой стороны (и возможно так вы об этом не думали), связана в сущности со временем. Какой бы алгеброй вы не занимались, операции выполняются последовательно одна за другой, и «одна за другой» означает, что у вас есть время. В статичной вселенной вы не можете представить себе алгебру, но геометрия в сущности статична» (МА).

Ещё одно разделение произошло внутри сообщества математиков и физиков. Если до конца XIX века взаимодействие было настолько тесное, что одни и те же люди занимались математикой и физикой, то в XX веке началось расхождение. Как сказал другой известный математик, «в первой трети века математика и физика развивались параллельно и через некоторое время перестали обращать друг на друга внимание. В 40-х годах Фейнман написал свой замечательный континуальный интеграл как новое средство квантования, проработав его потрясающе математически, – вообразите себе что-то вроде Эйфелевой башни, которая висит в воздухе, без фундамента с точки зрения математики. Вот она вся есть, она вся работает, а стоит она неизвестно на чем. Это продолжается и по сей день. ...И оказалось парадоксальным и чрезвычайно для меня приятным образом, что мы стали учиться у физиков в большей степени, чем они у нас» (МП, интервью 18).

Справедливости ради приведу и отчасти противоположное мнение ещё одного известного математика о взаимоотношениях математики и физики: «Вопреки мнению большинства современных математиков, я, вслед за Пуанкаре, считаю математику частью физики, то есть экспериментальной наукой. Слово «математика» означает «точное знание», и соответствующие открытия были получены из наблюдений явлений природы. ...Я предполагаю, что недооценка относящихся к реальному миру работ математиками объясняется тем, что экспериментально-математический характер этих исследований слишком труден для дедуктивных аксиомофилов, привыкших исследовать уравнения, не имеющие решений, или всюду расходящиеся ряды» (ВИА).

Второй раунд (о науке и религии)

А н о н и м. По поводу веры в происходящее. Вот был Александр Македонский. Мы что-то про него знаем. Вот был Моисей, мы тоже что-то про него знаем. Разница в том, что кости одного найдены, а кости второго нет? И почему из-за этого мы тотально должны верить в Александра Македонского и не верить в деяния Моисея?

Р о д и о н. Ну и да, тот факт что алгебраическая поверхность одновременно и двумерна, и четырёхмерна, удивляет, если вдуматься, не меньше, чем единый бог в трех лицах.

М а ш а. Деяния Македонского физически возможны.

Р о д и о н. Александр Македонский, так, на секундочку, воевал с людьми с песьими головами.

М а ш а. В это я, очевидно, не верю.

Р о д и о н. А если серьезно, то у историков-античников научный метод сильно отличается от историков-специалистов по Новому времени. Когда одни применяют свой метод в области других, получается полный бред.

М а ш а. Я сейчас не про историю говорю, а про естественные науки. Чтобы установить, что Иисус не воскрешал мёртвых, не нужна история.

А н о н и м. Почему деяния Моисея физически невозможны? Откуда вера в физические законы?

М а ш а. «в первый день Бог создал небо, землю и свет, и отделил свет от тьмы; на второй день — создал твердь посреди воды, отделил воду над твердью от воды под твердью, и назвал твердь небом; на третий — сушу, моря и растения, на четвёртый — светила на тверди небесной, на пятый — рыб, пресмыкающихся и птиц. Наконец, на шестой — зверей земных, скот, гадов земных и человека.»

Вот в это вы действительно верите?

Р о д и о н. Слушайте, ну возьмите любой текст про образование Солнечной системы, и перепишите его в кратком виде бытовыми словами, без научных терминов. Получится полный бред сумасшедшего. Все научные концепции, особенно в социальных науках, лишённые своего наукообразного флёра, звучат бредово.

М а ш а. Ну так о том и речь, что это все ложь и этого не было.

Р о д и о н. Наука (как и религия) – это не набор слов, а институции, воспроизводящие их трактовки, и организующие соответственно с ними как-то нашу жизнь.

М а ш а. Типичные истории в духе «в Библии/Коране/Торе/еще где-то все так и написано, как говорит наука, только кратко и иносказательно». Ничего подобного. Там написана чепуха.

Р о д и о н. Конечно религия это не наука. И наоборот. Мне кажется вы невнимательно читаете то, что я пишу, и пытаетесь упаковать мои слова в какие-то уже известные вам концептуальные коробочки, на которые вы заранее наклеили ярлык «брeда». Это, уж простите, не очень вежливо.

С е р г е й. Не хотел бы обесценивать, но судить о всей доктрине по первым строкам Пятикнижья – примерно как оценивать качество научной работы по первому абзацу её введения.

П ё т р. Лучше, чем по цвету обложки!

В а л я. А что шар можно разрезать на пять частей и сложить из них два шара того же размера, это тоже ложь?

М а ш а. Не ложь. Но если речь о «бытовых» разрезаниях, то там, конечно, множества будут измеримые, и тогда ложь.

Д и м а. Так коллеги ровно и говорят о том, что одних слов мало, им надо придать смысл — и в каждом случае по-своему.

В а л я. Что такое «день»? Период обращения Земли вокруг своей оси? Но ведь в первый день творения Земли ещё не было? Я верю, что в Библии написаны важные лично для меня вещи, но я далеко не всё понимаю, что там написано.

М а ш а. Сутки, допустим.

В а л я. И как померять сутки до создания Земли? Или до Большого взрыва? Или в другой системе отсчёта? Вы про «парадокс» близнецов знаете?

М а ш а. Про парадокс, конечно, знаю. Те, кто писал Библию, очевидно, считали время идущим независимо и не задумывались об этой проблеме.

В а л я. Те, кто читал Библию, о природе времени очень даже задумывались. Например, преп. Максим Исповедник, живший в 7 веке (историческое лицо, даже сохранились протоколы его допросов – византийские власти арестовали его за протесты против монофелитской доктрины). Его труды выглядят прямо как математические работы. Но естественно все словами, без формул, поэтому очень сложно разбираться.

М а ш а. И что же, он писал, что в разных системах отсчёта время идет по-разному?

В а л я. Я не эксперт по его творчеству (и не владею древнегреческим), поэтому сужу по современной англоязычной диссертации. Согласно преп. Максиму, время и пространство тесно связаны, то есть нельзя ответить на вопрос «когда?», не отвечая на вопрос «где?»

М а ш а. Это всего лишь гуманитарная формулировка, которая непонятно что означает.

В а л я. Да, разумеется. Потому что адекватный математический язык для описания движения ещё не разработали. Понятие движения (кинесис) для преп. Максима вообще было ключевым.

А н о н и м. Я может что-то упустил, но почему мы науке верим больше чем религии? Хороший пример описывал Бергсон: вот был закон сохранения механической энергии. Потом люди поняли, что он не работает и сказали, что тепло это тоже энергия, чтобы подогнать «закон природы» под заранее желаемый результат, дальше и другие вещи тоже начали называть энергией. Почему что-то такое мы вообще воспринимаем как некоторую истину, как нечто, что что-то описывает?

Б о р я. А кто воспринимает? Суть науки в принципе в том, что она заведомо ошибается и все, что в ней есть сейчас, будет когда-то опровергнуто.

М а ш а. Наука описывает природу, чем дальше прогресс, тем точнее. Религия ничего не описывает, религия – это набор сказок про бородатого Хоттабыча на небе.

В а с я. Ну Вам уже разные люди разными словами объяснили, что религия это НЕ набор сказок про бородатого Хоттабыча на небе. Как дальше продолжать беседу?

Р о д и о н. Мой вопрос скорее в том, а что НЕ является набором сказок про бородатого Хоттабыча?

Д и м а. Вот-вот, наука даже не может доказать, что объекты, с которыми она работает, существуют.

Р о д и о н. Рассуждения разных учёных 19-го века про «светоносный эфир» и «национальный дух» — это из той же серии. Нет никакого повода думать, что наши понятия хоть чем-то лучше.

Глава вторая (свобода и строгость)

Если расхождение между математиками и физиками хоть и не способствует взаимопониманию, но всё же не слишком мешает взаимному уважению, то расхождения между адептами так называемых точных (или по другой версии естественных) наук и адептами гуманитарных наук иногда выливаются в открытую вражду. Яркий тому пример – бушевавшие в 90-е годы прошлого века «Science Wars». Если вы, как и я, не следили за «Science Wars» в режиме реального времени, то рекомендую познавательную статью ««Но прежде всего это неверно»: Деррида, теория относительности и «войны наук»» (именно из неё я впервые узнала о знаменитом философе Симоне Вейль – меня удивило, что один известный французский математик аттестован в статье как «брат Симоны Вейль», а я никогда о ней не слышала). Отчасти это была борьба за ресурсы, ведь с окончанием Холодной войны тем же физикам стало гораздо сложнее финансировать из бюджета свои дорогостоящие установки (вроде так и недостроенного SSC). С их точки зрения именно гуманитарии оказались главными бенефициарами перераспределения расходов на науку, что и заставило физиков «нанести ответный удар». Однако не только из-за денег распалась связь между «физиками и лириками», причём распалась до такой степени, что уже невозможно представить себе, как один и тот же человек может быть одновременно математиком, физиком, богословом и философом (что в XVIII веке было делом обычным).

Язык математики существенно развился и кодифицировался в XX веке, обзаведясь жёсткой прескриптивной грамматикой. Современные математические тексты обязаны соответствовать строгим языковым нормам (пресловутая «математическая строгость»), иначе читатель с полным правом может отбросить текст, ограничившись комментарием: «Это даже не неверно!» Указывать на ошибку при этом вовсе не требуется, потому что ошибки, дыры и неточности имеет смысл искать только в математическом тексте. В то же время язык гуманитариев остался свободным от условностей – каждый может писать так, как считает правильным, руководствуясь лишь обычной интуицией носителя языка. Поэтому математикам часто бывает сложно читать гуманитарные тексты. Напрасно наш взор пытается найти в них «определения», «теоремы» или ещё какие-нибудь структурные единицы, за которые можно уцепиться, чтобы понять смысл сказанного.

Гуманитариям читать математические тексты (даже научно-популярные) тоже нелегко. Как писал один известный лингвист своему другу-математику, «Вы подчеркиваете, что при аксиоматическом методе «природа вводимых в рассмотрение предметов и отношений никак не разъясняется», о них ничего не сообщается. Хочу обратить Ваше внимание на то, что гуманитарный читатель решительно не может воспринять эту Вашу фразу так, как Вы ее замыслили. Причина – в словах! Если бы у Вас вместо т о ч к и была п а п а г и г л е м а, а вместо п р я м о й – с е п у л ь к а, то Ваше заявление было бы полностью психологически оправданно. Но когда Вы что-то говорите о точках и прямых, никакими силами носитель языка – нематематик не может освободиться от подсознательного ощущения, что он всё основное о характере обсуждаемых предметов знает, сколько бы Вы ни приказывали ему считать, что он ничего не знает, кроме аксиом. Как это он может ничего не знать о том, что такое точка или что такое прямая?!» (ВАУ, Приложение)

Что происходит, когда математик пишет гуманитарный текст? Вполне естественно, что гуманитарии относятся к таким текстам настороженно. Тут можно привести много примеров намеренно фейковых англоязычных текстов как времён «Science Wars», так и совсем недавних; а что касается русскоязычных текстов, то сразу вспоминаются исторические труды одного современного математика с соавторами. Конечно, негативный опыт прошлого бьёт и по добросовестным авторам – их не воспринимают всерьёз и даже не пытаются понять, что же они написали. Получается, что качественный гуманитарный текст, написанный математиком, часто не интересует ни коллег-математиков (некоторые из которых в принципе не читают нематематические тексты), ни тех гуманитариев, которые являются экспертами по данной теме. Пропасть между гуманитарным и математическим расширяется, а попытки преодолеть её не вызывают доверия ни у одной из сторон.

Что происходит, когда гуманитарий использует в своём тексте математические концепции? Понятно, что сразу найдутся равнодушные математики и физики, не без сарказма поясняющие, почему текст не имеет никакого математического смысла. При этом даже математически подкованный читатель часто не удосуживается разобраться в точном смысле понятий, которые использует автор (то есть «не может освободиться от подсознательного ощущения, что он всё основное о характере обсуждаемых предметов знает»). Хрестоматийный пример такого рода – это математическая метафора из статьи одного известного психоаналитика, которую некоторые физики проинтерпретировали как эквивалентность между пенисом и квадратным корнем из минус единицы, даже не разобравшись, что в статье речь шла вовсе не о пенисе, и даже не о фаллосе, а об образе фаллоса (то есть об образе образа пениса).

Однако есть и положительные примеры взаимодействия математического и гуманитарного. Наиболее близкий мне географически пример – это московская математическая школа (или скорее школы, поскольку лицо каждой школы во многом определяется личностью её руководителя, а руководители довольно сильно отличались друг от друга по своему мировоззрению). Научные руководители традиционно старались приобщать своих учеников не только к математической, но и к общечеловеческой, то есть гуманитарной культуре. Эти традиции производили сильное впечатление на немосковских математиков. Например, британский математик Дуза МакДафф, будучи аспиранткой, провела в Москве полгода под руководством основателя одной из известных школ. Руководитель при первой встрече заметил, что его гораздо больше интересует тема диссертации мужа Дузы (тот изучал творчество Анненского), чем задача, которую решила Дуза. Её поражало, что он говорил «о математике так, как будто это была поэзия.» «Он сказал, например, что в одной серии статей он пытался нащупать идею, которая не вполне ясно вырисовывалась, поэтому он попробовал снова несколько лет спустя, используя совершенно другой подход. Мне никогда не приходило в голову, что о математике можно думать как о чём-то, что не сводится к набору определённых, хотя возможно и очень красивых, теорем.»

Третий раунд (о реальности и мифах)

М а ш а. Вы утверждаете, что чудеса, описанные в Библии, действительно происходили в реальности?

Р о д и о н. А что такое реальность?

М а ш а. То, что вокруг, в жизни происходит.

Р о д и о н. Моя реальность из мельтешения очень простых знаков состоит, типа «проехала серая машина», «в интернете пишут то-то и то-то», «хочу есть». Там нету Моисея, но нету и Александра Македонского. Если я сравниваю какие-то политические события с историей Александра Македонского, в этом не больше реальности, чем в том, если бы я их сравнил с бегством евреев из Египта.

М а ш а. Есть свидетельства тому, что Александр Македонский что-то там делал.

Д и м а. То же можно и про Шекспира сказать, только его не существовало.

М а ш а. Фоменко?

Д и м а. Нет, его по факту не существовало, есть произведения, его именем подписанные, вопрос реального авторства до сих пор открыт.

М а ш а. Вы пытаетесь перевести разговор в какое-то другое русло. Понятно, что исторические свидетельства не могут дать 100% гарантию того, что какое-то событие происходило в реальности. Но библейские чудеса – это совершенно другого уровня не 100% гарантия. Это 0%. Что какой-нибудь Македонский завоевал какую-нибудь там страну, пусть и не гарантированно, но с высокой вероятностью мы можем утверждать, а вот что Христос воскресил Лазаря – это точно ложь, потому что невозможно воскресить мёртвого.

Р о д и о н. Не было никакой реальности 1000 лет назад. Есть какие-то остатки, по которым мы можем интерполировать картину, как если бы она была, и физические законы были неизменны. Это не реальность, это игра нашего воображения. Она ничем не хуже игры воображения, опирающейся на неизменность не физических, а религиозных истин потому что и те и другие — это абстракции, лежащие вне наблюдаемой реальности. Конечно, христианская метафизика плохо помогает стрелять из пушек. Зато помогла написать конституцию США.

М а ш а. Конституция США появилась благодаря идеям просветителей как раз в противовес религиозному мировоззрению, а не благодаря ему.

Р о д и о н. Единство и борьба противоположностей, знаете ли. Без Фомы Аквинского западная политическая мысль никуда бы не уехала.

М а ш а. Джефферсон, например, точно был атеистом.

В а с я. Хочу обратить Ваше внимание на то, что если Вы определите «день» как период обращения земли вокруг своей оси, процитированный Вами текст получится абсурдным: земля (а также солнце, или, например, день и ночь как обособленные явления) согласно ему возникает позже, чем начинают сменяться дни. Можно конечно объявить этот текст бессмысленным и потому неинтересным. Но в течении нескольких тысяч лет десятки тысяч, если не миллионы, людей, причём зачастую очень не глупых, и принадлежащих к самым разным культурам, над этим текстом довольно серьезно размышляли. Значит, что-то они находили в нем интересного.

М а ш а. Миллионы мух не могут ошибаться, понимаю.

В а с я. Ну и бодро же Вы называете мухами примерно всех кто жил до вас (а заодно некоторых своих собеседников). Успехов!

Р о д и о н. Вась, людям очень тешит эго думать, что они правы, а все остальные неправы. Особенно когда для этого нужно не страдать, как Альфред Вегенер, а когда это можно делать бесплатно (и когда реально вся культура за последние 100 лет тебя в этом поддерживает).

В а с я. Но я правда не понимаю, как людям нигде не жмёт, это ж какую силу духа надо иметь.

Р о д и о н. Ну в России никого как Джордано Бруно из крупных учёных не сжигали. Православное христианство вообще относится к науке сквозь пальцы, как к чему-то, что никогда не может повредить вероучению. А обратные примеры, типа А. Ф. Лосева и Д. Ф. Егорова, были.

В а с я. Обратные к чему?

Р о д и о н. Верующих ученых, пострадавших от атеистических властей. Именно за религиозные убеждения, и для которых эти убеждения были связаны с их научными занятиями.

Б о р я. Люди, как правило, закрепляются в вере после переживания некоторого религиозного опыта. С точки зрения Марии они заблуждаются. Но выбирая между собственным опытом и личным мнением Марии, я бы выбрал первое.

М а ш а. Не все остальные неправы. Атеистов в мире достаточно.

Р о д и о н. Вы говорите не об атеизме, а о том, что Библия — это вздор, который не может быть никому интересен (см. ваши слова про «сказки о чудесах», «невежественных крестьян»). Я не утверждаю, что изучать Библию должно быть интересно всем, тем более — верить религиозно. Но то, что у вас такого интереса нет, не значит, что те, у кого он есть, как-то хуже или невежественнее вас.

У меня вот интереса к вину или к духам нету, а ведь многие люди очень с большим интересом их оценивают.

М а к с и м. Я думаю полно людей, которые на ZFC смотрят с мыслью «вот ведь бред! какие же лунатики эти математики». Неспособность найти ценность в чем-то не обесценивает это что-то... Вокруг полно людей, которые находят в религии успокоение (особенно в такие страшные времена), моральные ориентиры, единство с другими людьми.

Я сам не верю ни во что особо (кроме ZFC), но отрицать ценность фундамента огромной части западной культуры...

Р о д и о н. Ну вот да, мне кажется что греческая религия таких споров не вызывает. Никто не делает круглые глаза «вы что, верите в подвиги Геракла?» Но при этом ценность греческой мифологии никто не отрицает (это конечно не касается верующих людей, у них другая мотивация).

М а ш а. При чем тут ценность? Я же ничего не имею против того, чтобы относиться к Библии как к художественной литературе. Ну вот есть Гарри Поттер, а есть Библия. Кому-то интересно читать Библию, окей. Я же не говорю, что плохо ее читать или что-то такое. Но представьте, что кто-то будет всерьез утверждать, что описанное в Гарри Поттере происходило в реальности. Для меня это такой же бред, как и про Библию. А все христиане, если они правда христиане, подразумевается, что считают.

Ну и, конечно, я считаю, что те, кто действительно верит в то, что написано в Библии, или еще в какую-то подобную чепуху, хуже и невежественнее меня.

Х о р а г н о с т и к о в. лол

Д и м а. Мария, а у тебя есть какие-то доказательства, что «объективный мир» вообще существует?

М и ш а. Разрешите влезть: любое сознание, осознающее собственное существование, уверено, что объективная реальность есть (доказать этого, конечно, нельзя, потому что доказывать нужно исходя из аксиом, а устанавливать их объективно не из чего). Объективная реальность – по определению то, существование чего необходимо для существования наблюдателя, произносящего эту фразу.

Д и м а. Конечно, вот только ты не можешь доказать, что ты не мозг в сосуде, а поэтому невозможно доказать, что то, чем занимается наука, имеет какое-либо отношение к объективной реальности, а не к виртуальной

М и ш а. Если я мозг в сосуде, то рассуждать о чём-либо бессмысленно. Если я берусь рассуждать о реальности, я предполагаю, что у меня есть возможность узнать о ней хоть что-то объективно. А все люди, что-то здесь писавшие – взялись.)

Д и м а. Безусловно, вот только тогда никакой разницы между наукой и религией нет. Ты принимаешь на веру, что у тебя есть возможность что-то узнать об объективной реальности.

М и ш а. Я не принимаю на веру – результат моих попыток познать что-то не зависит от того, как я к ним отношусь.)

Глава третья (фундаментальное и прикладное)

В самой математике можно различить множество областей помимо классических геометрии и алгебры. Каждая эпоха порождает новые направления. Развиваясь, некоторые из них становятся органичной частью математики, а некоторые отделяются и начинают жить своей жизнью, как это сделали, например, компьютерные науки. Хотя многие математики очень ценят «единство математики», а некоторые полагают делом своей жизни «сохранение единства», также встречается мнение, что единство не настолько важно, чтобы к нему специально стремиться. Решай те задачи, которые тебе нравятся, или те, которые причиняют пользу человечеству, и не думай о последствиях. Поэтому математика постоянно обрастает приложениями, меняющимися от поколения к поколению гораздо быстрее, чем она сама. Как ответил один известный американский математик на вопрос, чем занимается его бывший коллега, а ныне миллиардер и меценат: «он занимается самой чистой областью прикладной математики – делает из денег ещё большие деньги».

Дихотомия между фундаментальной и прикладной математикой, как к ней ни относиться, довольно заметна. Соответствующие департаменты в университетах часто находятся в разных зданиях, а их сотрудники не испытывают особого желания организовывать совместные мероприятия. При этом математики часто сокрушаются (или наоборот, радуются), что их математика слишком далеко ушла от приложений. Сравните названия книг: «Апология математика» (1940), «Апология математики» (2010), «Математика без апологий» (2015), в которых математики разных эпох и культур увлекательно рассуждают о (бес)полезности чистой математики. Особенно точно название последней книги. В самом деле, сколько можно извиняться? Ведь из тех бесполезных областей математики, о которых с гордостью писал автор апологии 1940 года (он особенно уповал на чистоту теории чисел и теории относительности), уже проистекли такие приложения двойного назначения как криптография с открытым ключом и точные спутниковые навигаторы.

Несмотря на явные различия между фундаментальным и прикладным, одни и те же люди часто способны заниматься как чистой математикой, так и её приложениями. Особенно если жизнь заставит. Показателен пример одного известного польского математика прошлого века, участника Львовской математической школы. Он мирно занимался топологией у себя на родине, придумывая прекрасные ненужные теоремы. За несколько дней до начала Второй мировой войны успел эмигрировать в США, где внёс ключевой вклад в создание водородной бомбы. Всё ещё засекреченная математическая составляющая его вклада, если верить слухам, представляет интерес и с точки зрения

чистой математики. В отличие от других отцов термоядерного оружия он не особо комплексовал по поводу своего достижения. Ему принадлежат слова: «Многие каются в грехах, чтобы застолбить приоритет в содеянном.»

Встречается также мнение, что нет существенной разницы между чистой и прикладной математикой. Его тяжело доказать или опровергнуть, поскольку интересная математика может произрасти из сугубо практических задач, и наоборот, самые абстрактные теории могут выродиться в скучную математику, которую терпят только ради приложений (в число которых иногда входит защита диссертаций или повышение публикационной активности). Тем не менее, можно описать общую динамику движения от прикладного к фундаментальному. Это очень точно сделал один из создателей теории электромагнетизма: «Факты, рассмотренные сами по себе, несут мало пользы. Они сбивают с толку своим количеством и очевидной несвязанностью. Однако позвольте им соединиться в теорию и прийти к взаимной гармонии, и будет совсем другое дело. Теория есть сущность фактов. Без теории научное знание было бы достойным лишь сумасшедшего дома.»

Отдельный вопрос, что считать «фактами» (или если говорить о математике, то «задачами»), а что – «теорией». В XIX веке, когда учёные начали дистанцироваться от философов, «теория» скорее ассоциировалась с философией, а «факты» – с наукой. Правда, тогда и «научные факты» были по-настоящему фундаментальны, к ним относились примерно как к семейным бриллиантам. Об этом можно судить по следующему высказыванию одного известного британского математика XIX века, почти открывшего общую теорию относительности (ему не хватило лишь маленькой философской идеи – объединения пространства и времени в одно целое). Противопоставляя философию и науку, он так выразился о научных фактах: «Учёный, с другой стороны, объясняет ровно столько, сколько он может, а потом говорит: «Это всё, что я могу сделать, остальное вам нужно узнать у следующего за мной.» А что касается данных им объяснений, придёт следующий за ним или нет, будут какие-либо дальнейшие объяснения или нет (и возможно нам придётся ждать сотни или тысячи лет, прежде чем будет сделан следующий шаг), – однако если исходный шаг был научным шагом, получен истинно научными методами и выкристаллизовался из нормального опыта здоровых людей, то этот шаг останется навсегда, независимо от того, сколько всего он оставил необъяснённым» (УКК, стр. 32).

Не кажется ли вам, что современные научные шаги (например, те из них, что зафиксированы в качестве рецензируемых публикаций) иногда довольно далеки от того, чтобы «остаться навсегда»?

Четвёртый раунд (об истине)

В а л я. Мария, давайте заменим в Вашем комментарии слово «религия» на слово «математика». Получим: математика ничего не описывает, математика – это набор сказок про модули, многообразия, многомерные пространства и прочую чушь, которой никто никогда не видел. Согласны?

М а ш а. Нет. Даже если какое-то математическое понятие не существует в реальности (многие существуют), мы все строго определяем и логически доказываем одно из другого. В Библии же написано: Вселенная была создана так-то. Нет, мы точно можем утверждать, что она образовывалась и близко не так. Написано, что Иисус воскресил Лазаря. Нет, мы точно можем утверждать, что такого не могло быть, это говорит наука. И т.д. все по каждому факту. Библия – это набор лжи.

Д и м а. Что такое истина? Что такое ложь? Как это понимать?

М а ш а. Это известно всем. Ребенку пятилетнему.

Д и м а. Просветите меня, я заблудился =) Мне два дня до 5летия =)

Р о д и о н. А Ваня говорил, что истина — это то, что эквивалентно утверждению о том, что Имя Божие есть Сам Бог. Или как-то так, пусть поправит. В каждой избушке свои погремушки...

Б о р я. Ничего себе, как быстро Ваня скатился в ересь. Каноническая православная церковь это дело осуждает.

Р о д и о н. Да я наверняка перепутал.

Б о р я. Может и нет, это имяславие. Егоров, Лузин и ко были адептами. Есть замечательная книга об этом: «Имена бесконечности».

В а н я. Вопрос об имяславии — принципиально сложный богословский вопрос.

Есть мнение, что сейчас та или иная его версия вошла в часть официальной богословской доктрины (его, в частности, кажется, придерживался о. Александр Геронимус, специалист по применению топологий Гротендика в теории представлений и ученик Ю. И. Манина).

Кажется, я ни разу не утверждал, что являюсь полным сторонником имяславия. До сих пор, однако, понятие Истины мне кажется связанным с понятием Имени Бога (в частности, потому что Истина, мне кажется, — одно из них), но я буквально про это давно не думал.

Мандельштама, тем не менее, читаю постоянно («И поныне на Афоне Древо чудное растёт»). Даже начал учить наизусть малое собрание сочинений (в тексте Бейлинсона о семинарах Гельфанда было сказано, что Саша знал лично двух людей, знавших всего Мандельштама наизусть), но пока только страниц двадцать, кажется, выучил.

И, кроме Мандельштама, на эту тему еще можно читать Флоренского, «Столп и утверждение Истины».

М а ш а. Истина – это верное утверждение. Это неопределяемое понятие. Я вам не философ, чтобы на такие вопросы отвечать.

А н о н и м. В любом коммутативном кольце есть максимальный идеал. Истина или ложь?

М а ш а. Не знаю, если честно.

Д и м а. Ну так проблема именно в критерии истинности утверждения, они разные бывают (а как понимать истинность, например, в нечеткой логике?) Прежде чем назвать утверждение ложным, лучше критерий истинности указать.

М а ш а. Всякие там логики – это гуманитарщина.

Х о р л о г и к о в. бан

М а ш а. Как логика может быть нечёткой?

Д и м а. Когда у нее значений истинности континуум, например. Вообще определение советую посмотреть. Шокирую еще сильнее — она на практике юзается.

М а ш а. Практика – критерий истинности. :) Если серьезно, истинное утверждение – то, которое можно доказать. А как еще определишь?

А н о н и м. А проверяли ли вы «доказательство» того, что земля не плоская? Откуда вы это знаете?

Д и м а. Везде ли есть правила вывода?

М а ш а. А какие правила? Обычный математический вывод подразумевается.

А н о н и м. Если так, то чем вам доказательство Гёделя существования Бога не нравится? Или даже Спинозу можно взять. Там вполне хороший вывод из аксиом.

М а ш а. Не проверяла, что у Гёделя правда все это следует одно из другого. Ну пусть так. Только к богу какое это отношение имеет? У Гёделя просто набор каких-то определений. А бог в христианстве (и, наверное, почти любой другой религии) – это всемогущий мужик на небе.

В а л я. За другие религии не скажу, но в христианстве Бог – не мужик.

М а ш а. В смысле? Там же дядька такой с бородой.

М и ш а. Я считаю, что существующее=математика, так что об остальном рассуждать нет смысла, а вся мыслимая математика существует. А моделируется ли бог как математический объект – зависит от того, как спрашивающий определяет бога.

Каждый, кто пытался учить студентов математике (именно математике, а не приложениям), наверняка замечал контраст между стройной картиной мира у себя в голове и фантазмагорическими представлениями о предмете, которые образуются в головах у студентов (если судить по их вопросам и ответам на занятиях и контрольных мероприятиях). Да и в личном опыте можно найти примеры, когда туман над свежеизученным математическим объектом рассеивался крайне медленно и неохотно (помню, как решая простейшую задачу на зачёте по алгебре, я никак не могла ухватить за хвост нормальную подгруппу, фигурировавшую в задаче). Ни блестящий лектор, ни культовая книга не способны заменить длительной самостоятельной работы по изучению предмета. Казалось бы от той точной науки, каковой считается математика, можно было бы ждать большей педагогической эффективности: преподаватель рассказал – студент выучил. А на самом деле получается, что «учить математику и заниматься математикой – это одно и то же».

Чтобы понять, что изучение математики в университете в принципе не сводится к переписыванию с доски в тетрадку и последующему заучиванию конспекта, достаточно посмотреть на типичную доску, у которой (и с помощью которой) беседовали математики. Фотографии таких досок часто используют в декоративных целях, поскольку изображённые на доске комбинации символов больше напоминают арт-объект, чем научный текст. Почему бы вместо символов не использовать что-то более наглядное и общепонятное? На этот вопрос, как ни странно, точнее всего отвечает цитата из одного богословского трактата, автор которого, насколько мне известно, не имел серьёзного математического образования: «... исконная «функция» символа не в том, чтобы изображать (что предполагает отсутствие «изображаемого»), а в том, чтобы я в л я т ь и п р и о б щ а т ь явленному.» Эта «исконная функция символа» особенно ярко проявляется, когда лектор случайно меняет обозначения посреди лекции. Ему по-прежнему всё понятно, ведь он продолжает говорить о той же самой нормальной подгруппе, которую определил ранее (и которая просто поменяла причёску). А вот студентам приходится тяжело, потому что для них символ был только обозначением, а не явлением математического объекта.

В каком смысле «математические объекты» являются объектами наблюдаемой реальности? И являются ли? Как сказал один известный политолог о материальности мира, «последняя доказывается не парой фокуснических фраз, а длинным и трудным развитием философии и естествознания.» Даже если мы согласимся считать все математические объекты чисто материальными, вряд ли они станут от этого очевидней. К тому же кажется, что современные математики чаще оказываются платониками, то есть воспринимают математические объекты как умозрительные, но совершенно реальные сущности (отсюда известная максима «Очевидно то, что легко доказать»). Нетрудно найти интервью с математиками, в которых на сакраментальный вопрос «Математика – это открытие или изобретение?» респонденты без раздумий отвечают «открытие». Интервью с ответом «изобретение» мне найти не удалось.

В начале прошлого века взгляд на математику как на изобретение, по-видимому, был более мейнстримным. Один французский математик так описал процесс математического творчества в своём знаменитом докладе для психологов: «Что же такое в действительности изобретение в математике? Оно состоит не в том, чтобы создавать новые комбинации из уже известных математических фактов. ... Творить это означает не создавать бесполезных комбинаций, а создавать полезные которых ничтожное меньшинство. Творить – это уметь распознавать, уметь выбирать.» Дальше он интересно рассуждает о том, как математик на подсознательном уровне выбирает «полезные комбинации», руководствуясь при этом (кто бы мог подумать) «эстетическим чувством». «Но каковы математические характеристики, которым мы приписываем свойства красоты и изящества и которые способны возбудить в нас своего рода эстетическое чувство? Это те, элементы которых гармонически расположены таким образом, что ум без усилия может их охватывать целиком, угадывая детали. Эта гармония служит одновременно удовлетворением наших эстетических чувств и помощью для ума ... мы приходим к следующему выводу: полезные комбинации это в точности наиболее красивые...» (АП).

Похожий вывод сделал один современный математик на своём кружке для дошкольников. Он заметил, что дети просили его позаниматься подольше ровно в тех случаях, когда на уроке он давал им задачи с красивой мозаикой. Заподозрив, что дело не в его математике, а в интересной игрушке, он как-то предложил им остаться после урока и поиграть с мозаикой просто так. Но дети возмущённо потребовали задачку. «Вот так я понял, где лежит истина. Детям нужно полноценное интеллектуально-эстетическое удовольствие. Если одна из половин отсутствует, полноценность теряется, а с ней и ощущение праздника. Новогодняя ёлка без игрушек имеет в глазах детей так же мало притягательности, как игрушки без ёлки. Только когда они соединяются вместе, наступает праздник. Я надеюсь, что в будущем, через годы, когда мои ребята будут заниматься более абстрактной, «умственной» математикой, они будут получать от этого больше удовольствия, чем их сверстники. Ведь возникающие у них в уме абстрактные образы и понятия будут где-то на дне сознания эмоционально сливаться с «ёлкой», окрашиваться воспоминаниями о разноцветных задачах их детства» (АКЗ, стр. 24-25).

Пятый раунд (о культуре)

В а л я. Да, Библия ничего строго не определяет. Как и авторы книг по математике. Один гуманитарий мне жаловался, что прочёл (пока в поезде ехал – долго ехал) всю книгу Куранта и Роббинса «Что такое математика?» и ничего не понял. Ему даже в голову не приходило, что чтение книг по математике предполагает личный опыт (сел с листочком и ручкой и подумал над смыслом прочитанного). Он думал, что можно как сборник сказок это читать.

М а ш а. Обычно все-таки авторы книг по математике все строго определяют.

В а л я. Нет. Даже Бурбаки не придерживались этого принципа.

М а ш а. Да любой учебник возьмите!

В а л я. Учебник (университетского уровня) предполагает определенный уровень математической культуры у читателя.

Пример из жизни: я в онлайн-курсе дала стандартное определение поля (9 аксиом). Из вопросов на форуме стало ясно, что многим студентам непонятны аксиомы о существовании нейтрального и обратного элемента. В частности, был задан вопрос «Нейтральный элемент для каждого элемента свой, как и обратный?»

И это, правда, не очень понятно из определения, если нет культуры обращения с кванторами.

М а ш а. Ну просто не разобрались в значении кванторов.

Р о д и о н. Так у вас тоже нету культуры чтения священных текстов.

Н и к и т а. Все строго определить невероятно трудно и довольно бессмысленно. Кажется все знают историю про логиков, которые попытались написать всю математику, пользуясь строгими логическими доказательствами. В итоге доказательство простого факта, что $1 + 1 = 2$ растянулось у них на несколько томов...

Р о д и о н. Я вот нотной грамоты не знаю, я же не говорю, что музыкальные листы это «набор вранья». Если я просто не умею их читать. Кому-то может процесс звукоизвлечения в музыке тоже показаться абсурдным. Смотрите, конским волосом по кошачьим кишкам елозят, ну и умора! Я боюсь представить себе, какая может быть экспериментальная проверка истинности музыкальных фраз.

В а л я. Да, некоторые не воспринимают музыку.

Р о д и о н. Вот я из их числа.

В а н я. К нам в университет прибежал дикобраз.

Р о д и о н. !!!!!

В а н я. Они тут везде. Дня три назад, – Представляете, иду по улице, – а я потерял наушники, поэтому музыка играет прямо из телефона, просто ХТК. И тут на дорогу выбегает дикобраз: я думал, это котег, – но он такой большой и поднял иглы! Ну я за ним и побежал, чтобы анфас сфотографировать.

Р а и с а. Бедный дикобраз.

А н д р е й. Дикобраз познакомился с московской (математической) культурой!

В а н я : :) Но ведь Хорошо Темперированный Клавири)))

А н д р е й. Тут главное — в чьем исполнении.

В а н я. Ну от Гленна Гульда не то, что дикобраз, — я сам бы убежал! В исполнении Татьяны Николаевой я хотел его послушать.

Глава пятая (язык и смысл)

Что объединяет математику? Почему математические результаты, полученные тысячи лет назад не теряют своей актуальности? Почему ничего не отвергается и не опровергается с течением времени, как в других науках? Почему каноны красоты в математике не меняются с той же скоростью, что в искусстве? Математика такая медленная, что стороннему наблюдателю кажется застывшей. (Сравните три самых типичных замечания нематематика, узнавшего, что его собеседница — математик: «Математика — это очень сложно», «Я в школе терпеть не мог математику» и «Разве в математике ещё не все теоремы доказали?») Ни эмпирическая, ни эстетическая составляющая математики сама по себе не даёт ответа на вопрос, почему математика так медленно стареет. Вряд ли современный человек захочет испробовать на себе рецепты античной медицины или посмотреть гладиаторские бои вместо кино. Почему же теорему Пифагора многие по-прежнему считают нужной и интересной?

Математика фиксирует результат работы чистого разума, поэтому мало зависит от непостоянных социально-экономических факторов вроде доступного оборудования или культурных стереотипов. Эволюция математики во многом определяется развитием её языка. Нужен ли язык, чтобы думать — вопрос дискуссионный. Язык точно нужен, чтобы разговаривать, то есть передавать свои идеи через пространство и время другим математикам. Хотя сама математика не особо привязана к какой-то конкретной культуре, позволяя надеяться, что «в каком-то смысле математика будет существовать всегда, потому что является частью структуры человеческого разума, и уничтожить ее можно, только уничтожив само человечество» (МП, интервью 8), язык математики часто развивается в рамках определённой культуры и вполне может исчезнуть вместе с её носителями.

Сложно сказать, была ли математика у шумеров или древних египтян, потому что их математический язык, если они вообще его развили, до нас не дошёл. Зато с древними греками такого вопроса не возникает. Когда школьник открывает свой первый учебник по геометрии, перед ним открывается уникальная возможность — научиться говорить на древнейшем математическом языке. Язык этот сохранился благодаря «Началам» (вот уж действительно удачное название). Определения, постулаты, аксиомы, теоремы, леммы и доказательства — это средства математического языка Евклида, не утратившие актуальности и в наши дни. То, что многие школьники свободно говорят на этом языке, свидетельствует о единстве математики. (Конечно, много — понятие относительное, имеется в виду, что таких школьников гораздо больше, чем тех, кто свободно говорит, к

примеру, на древнегреческом.) Современная математика и математика времён Евклида или Архимеда – это одна и та же область человеческой деятельности. Язык математики уравнивает школьников с великими мыслителями древности, позволяя первым (при желании) переоткрыть результаты последних.

Действительное единство математики состоит в том, что ею может заниматься каждый разумный человек. Если слегка развить известный анекдот о математике и воздухоплователях, то математическую деятельность (например, решение задачи) можно охарактеризовать тремя свойствами. Во-первых, человек творчески размышляет, то есть пытается придумать что-то новое для себя (даже если для остального человечества его открытие окажется не новостью, а глубокой древностью). Во-вторых, человек самостоятельно проверяет свою догадку, чтобы убедиться в её точности (а не бежит к оракулу или учителю, чтобы подтвердить или опровергнуть свой ответ). В-третьих, если решение получено и получено именно математическим путём (без помощи оракула), то оно доставляет человеку особую радость (с лёгкой руки Архимеда и поныне выражаемую древнегреческим словом «Эврика!»), даже если пользы от него ноль. В этом смысле «математика — не оторванная область творчества. Она есть аспект или грань всякого творчества» (оАГ, 19.2).

Если другие науки декларируют независимость от человеческого фактора, когда формулируют свои «законы природы», то математика не может позволить себе такой роскоши. Как сказал один известный аболиционист: «человек стремится к аналогиям и открывает родственность во всем, что вокруг него. Он помещен в самый центр бытия, и все другие творения устремляют к нему луч родства. И нельзя понять ни человека без этих других творений, ни другие творения без человека.» Можно долго спорить о справедливости этого замечания, если рассматривать его в максимальной общности. Если же под «творениями» подразумевать «математические объекты», то получится довольно точное описание математического творчества.

Математики, как и поэты, находятся в исключительно сильной зависимости от своего языка. Знание, полученное в результате долгого и сложного опыта, архивируется в компактные «имена», которые можно в любой момент вызвать из памяти, раскрыв их полный смысл. Этим беззастенчиво пользуются студенты, заучивая разные мантры вроде «дифференциальная форма – это сечение кокасательного расслоения». Даже если сам студент воспринимает свою фразу как бессмысленный набор слов, он сможет заклинать ею не слишком дотошного преподавателя на коллоквиуме. Ведь в голове у экзаменатора мантра развернётся в осмысленное математическое определение, и возможно он автоматически отождествит свой мыслительный процесс с тем, что происходит в голове у студента.

«Имена», которые математики дают своим «творениям», столь же разнообразны по стилю, как и средства выразительности в литературе. С течением времени «имя» может преобразовываться, обрести новыми смыслами или менять семантическое поле – как и в литературном языке. Например, концепция центра тяжести, заданная две с лишним тысячи лет назад неявным аксиоматическим определением из семи параграфов

дополнилась краткой версией – явной формулой в четверть строчки длиной (краткость достигается за счёт вызова «имён» интеграла и дифференциала). «Любопытно, что в наши дни каждый студент, изучающий математический анализ мог бы придумать, как прямо определить равновесие и центр масс. Но – с учётом словарного запаса того времени – Архимеду легко было привести только неявные определения, которые он использовал, чтобы совершить свои поразительные открытия отношений площадей (сегментов) и объёмов (шаров, конусов и призм)» (БМ, раздел 3).

«Однако не стоит клеймить неявные определения!» Интересно, что даже ярые противники «аксиоматического метода» часто бывают не прочь охарактеризовать математическое понятие списком его определяющих свойств, лишь бы это позволило им заменить унылое вычисление красивым рассуждением. Рассуждать приятней, чем вычислять. Кроме того, неявные определения в меньшей степени зависят от специальной математической терминологии, поэтому могут дать пищу для размышлений и нематематикам. К примеру, сравните изящную аксиоматику часов (АНП, стр. 344), изложенную прекрасным русским языком, и придание ей точного математического смысла (АНП, стр. 359-361), которое редкая птица дочитает до середины.

Можно ли задействовать творческий ресурс математиков, чтобы создать общечеловеческий язык для содержательного диалога между учёными, философами и богословами? Или дары математики человечеству не выйдут за рамки технологических приложений вроде криптовалют и водородных бомб? Смогут ли гуманитарии с доверием и пониманием отнестись к попыткам математиков сделать что-то полезное в Нематематической области? Конечно, это во многом зависит от самих математиков. Может быть нам, математикам, в отношениях с гуманитарными науками стоит перейти с позиции авторитетного старшего брата на роль любопытной младшей сестры?

Мне кажется, что во многих современных диалогах наблюдается как взаимное стремление найти общий язык, так и острая нехватка общепонятных «имён». Причём часто бывает, что нужные «имена» хорошо известны экспертам в конкретной области, но совершенно неведомы остальным участникам диалога, так что последним приходится на ходу изобретать новый сленг, чтобы отразить свой личный опыт, в то время как первые продолжают говорить на уже сложившемся языке, отражающем опыт многих поколений. Характерный пример можно найти в комментариях к интервью одного филдсовского лауреата. Он среди прочего упомянул о «нечеловеческих разумах», описав их воздействие на человеческий разум. В одной из веток комментатор, хорошо знакомый с православной традицией, соотнёс опыт автора с христианским учением о демонах. Сам автор сначала не понял, о каких «духах» спрашивает комментатор, тогда как для комментатора «духи» и «нечеловеческие разумы» с очевидностью были частью одного и того же «имени». И как раз эту проблему установления общепонятных «имён» математики могли бы при желании решить.

Шестой раунд (о доказательствах)

Р о д и о н. В математике вообще очень важен элемент театральности. Вряд ли кто-то, кто посещал выступления Концевича, усвоил из них какое-либо строгое доказательство математического факта. Но создаваемое им умонастроение зачастую вполне плодотворно.

Х о р м а т е м а т и к о в. жирный плюс

П е т я. Пользуясь случаем, вброшу в эту дискуссию слайды с доклада Кевина Баззарда о математике и доказательствах. Современная математика ушла, по мнению докладчика, слишком далеко от идеальных принципов «доказательство = последовательность импликации из аксиом».

Б о р я. Он где-то на mathoverflow признался, что этот доклад был специально провокационный. И на самом деле не все так плохо

П е т я. Да, так и есть, но у Кевина есть четкая агенда – он продвигает lean. С другой стороны доклад не теряет в актуальности

В а л я. Да, Майкл Харрис об этом красочно пишет в своём блоге (Mathematics without apology). Я там и про Баззарда узнала.

Б о р я. Ну может если математика чисто в прогу превратится, то Мария будет довольна)

М а ш а. Нет, я буду категорически против, я никогда с таким не соглашусь.

Д и м а. Этого все равно не будет — математика на поиске программ-доказательств не заканчивалась и не закончится.

Б о р я. Но это все таки выведет исследования на новый уровень. Как минимум peer review будет быстрее и увлекательнее.

П е т я. Согласен, но правильно настроенные алгоритмы смогут научиться и придумывать теоремы. Это отдельная область исследований.

Д и м а. Смогут — они уже это делают. А как по-твоему доказывается, что процессор делает то, что должен делать (корректно вычислять)? Это как раз нужно взять и формально доказать.

М а ш а. Это все не является настоящей математикой.

П е т я. Я делал маленькие доказательства в lean, я готов заявить что до полной компьютеризации доказательств очень и очень далеко :(Пример Питера Шольце только подтверждает эту мысль на самом деле (liquid tensor experiment).

Б о р я. Сколько лет дашь?

П е т я. Больше 20-ти. Нужно финансирование таких проектов, то есть нужно на бюрократическом уровне такие инициативы поддерживать. А мы с вами знаем как медленно бюрократия адаптируется под современные тренды.

М а к с и м. А в чем проблема? В вводе-выводе?

Д и м а. Формальные доказательства сильно сложнее, чем кажется.

М а к с и м. В плане читаемости? Или сложности алгоритмической?

Д и м а. Часто во всех смыслах.

М а к с и м. Вопрос читаемости точно как-нибудь решится, мб разработкой подходящего матаппарата / типов данных. Я видел какие-то пружины в кванторах, выглядело абсолютно нечитаемо и ужасающе.

М а ш а. Компьютеры не умеют думать, только исполнять заданный алгоритм.

Д и м а. А что такое алгоритм?

М а ш а. Последовательность действий.

Д и м а. Но что такое действие? Когда эта последовательность действий существует, а когда — нет?

М а ш а. Действие — это неопределяемое понятие. Это всем известно.

Д и м а. А вот и нет, как раз в данном случае это должно быть очень четко определяемое понятие, иначе алгоритмом можно вообще все что угодно провозгласить, а как работать с этим на практике — неясно совсем. И вот что это за элементарные действия — как раз можно определить, причем более чем одним способом.

Б о р я. Иногда возникают баги типа неизвестно, доказано ли что-то в ZFC или нет. Такие вопросы например были к доказательству Вайлса. Дело в том, что оно по умолчанию использует вселенные Гротендика, независимые от ZFC. Конкретно с Ферма вроде известно, что доказано, но это показывает нюансы какой сложности могут возникать, если выписываешь все с нуля

П е т я. Lean и Coq построены на зависимой теории типов, в первую очередь, надо выучить её, это несколько дней. Если вы не Питер Шольце то у вас отнимет несколько недель на то чтобы по документации учить как пишутся доказательства для объектов которые проходят на первом курсе матфака. На самом деле к этому можно привыкнуть но это очень небыстрый процесс. Вот документация для гладких многообразий.
Наслаждайтесь :)

М а к с и м. Оо, любопытно.

Петя. У Питера его эксперимент занял больше 6 месяцев. Нам, простым смертным, нужно сильно больше времени для сильно более фундаментальных вещей. Так что я не надеюсь на быстрое принятие хоть какой-то системы формализации пруфов. Прошу прощения, что увёл спор не в то русло

Дима. Ты че, Петя, продолжай, думаю, про хена мало кто знает =)

Петя. Я не спорю, тема очень интересная, и я очень надеюсь что мой пессимизм скоро разрушится.

Список литературы

- [МХ] Майкл Харрис (Michael Harris), «Mathematics without apologies» (блог); пост от 08.02.2022: <https://siliconrecker.substack.com/p/news-flash-is-the-amr-really-the>
- [МА] Майкл Атия (Michael Atiyah), «Mathematics in the 20th Century», Bulletin of the London Mathematical Society, Volume 34, Issue 1, January 2002, pp. 1-15
- [МП] «Математические прогулки» (сборник интервью), Paulsen, 2022; интервью 18 впервые издано в газете Троицкий вариант: <https://www.mccme.ru/edu/statii/Manin-13N.pdf>
- [ВИА] В.И. Арнольд, «Экспериментальная математика», М.: Фазис, 2005
- Аркадий Плотницкий (Arkady Plotnitsky), ««But It Is Above All Not True»: Derrida, Relativity, and the «Science Wars»», Postmodern Culture, Volume 07, Number 2, January 1997
- [ВАУ] В.А. Успенский, «Математическое и гуманитарное: преодоление барьера», М.: МЦНМО, 2011
- Дуза МакДафф (Dusa McDuff), «An encounter with Gel'fand»
- —, «The recipient's response at the prize (Ruth Lyttle Satter Prize in Mathematics) session», Mathematical Notices, Volume 38, Issue 3, March 1991, pp. 185-187
- [УКК] Уильям Кингдон Клиффорд (William Kingdon Clifford), «Lectures and Essays II», Macmillan, 1879
- [АП] Анри Пуанкаре (Henri Poincaré), «Математическое творчество», приложение III к переводу книги Жака Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики», М.: МЦНМО, 2001, перевод с французского М.А. Шаталова и О.П. Шаталовой
- [АКЗ] А.К. Звонкин, «Мальши и математика», М.: МЦНМО, 2007
- [МП] «Математические прогулки» (сборник интервью), Paulsen, 2022; интервью 8 впервые издано в журнале «Огонёк»: <https://www.kommersant.ru/doc/3200633>
- [оАГ] протоиерей Александр Геронимус, «Математика в контексте православного богословия», Христианство и наука, 2008
- [БМ] Барри Мазур (Barry Mazur), «The Language of Explanation», Symposium in Science and Literature, 2009
- [АНП] А.Н. Паршин, «Лестница отражений», М.: МЦНМО, 2022